ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA E CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

Prof. Silvio Antonio Bueno Salgado e Prof. Iury Ângelo Gonçalves

2019

PREFÁCIO

Estas notas de aula são resultados das aulas de Matemática II, as quais são ministradas na Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL, campus de Varginha. O objetivo dessas notas é auxiliar o aluno na aprendizagem dos conceitos matemáticos durante o curso. Para elaboração dessa notas, foram utilizados os livros intitulados “Curso de Análise” (LIMA, 1989) e “Cálculo” (APOSTOL, 1981).

Sumário

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais de Geometria Analítica

Neste capítulo, apresentam-se alguns tópicos de geometria analítica vetorial, indispensáveis para o estudo do cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis.

1.1 O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^n$

Definição 1.1 (Espaço euclidiano n dimensional)**.** *Seja n um número natural. O espaço euclidiano n dimensional, denotado por $\mathbb{R}^n$, é o produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$. Os elementos desse conjunto são as listas de números reais da forma $x = (x_1, ..., x_n)$. Para cada $i = 1, ..., n$, o termo x_i chama-se a i-ésima coordenada do elemento x.*

Quando trabalha-se com o espaço euclidiano n dimensional, convém destacar alguns casos particulares de fundamental importância: quando $n = 1$, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, que geometricamente é representado por uma reta; quando $n = 2$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o plano cartesiano; e quando $n = 3$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ representa o espaço euclidiano tridimensional. Denota-se por $x = (x_1, x_2)$ um elemento qualquer do espaço $\mathbb{R}^2$ e por $x = (x_1, x_2, x_3)$ um elemento qualquer do espaço $\mathbb{R}^3$. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados de *pontos* ou de *vetores*. Denota-se por $0 = (0, ..., 0)$ o vetor, cujas coordenadas são todas nulas, o qual é chamado a *origem* de $\mathbb{R}^n$. Dado um elemento $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, o vetor $-x = (-x_1, ..., -x_n)$ chama-se *vetor oposto* a x.

Define-se, em $\mathbb{R}^n$, duas operações: adição e multiplicação de um número real por um vetor. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ um único elemento de $\mathbb{R}^n$ chamado soma de x com y, denotada e definida por $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$. Já a multiplicação de um número real α pelo elemento

$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ faz corresponder um único elemento de $\mathbb{R}^n$ denotado e definido por $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.

Dados quaisquer x, y e z em $\mathbb{R}^n$, α e β números reais, valem as seguintes igualdades:

A1) $x + y = y + x$,

A2) $x + 0 = x$,

A3) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

A4) $x + (-x) = 0$,

A5) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$,

A6) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

A7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

A8) $1 \cdot x = x$.

A propriedade A2 afirma que 0 é o elemento neutro da operação de adição e a propriedade A8 afirma que o elemento 1 é o elemento neutro da operação de multiplicação de um número real por um vetor.

Definição 1.2 (Espaço vetorial). *O conjunto $\mathbb{R}^n$, munido das operações de adição e de multiplicação por um número real, satisfazendo as oito propriedades listadas anteriormente, recebe o nome de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ espaço vetorial.*

Definição 1.3 (Elementos iguais). *Dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, elementos de $\mathbb{R}^n$, diz-se que x é idêntico a y, e denota-se por $x = y$, caso $x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$. Portanto, uma igualdade entre dois elementos de $\mathbb{R}^n$ equivale a n igualdades entre números reais.*

Em $\mathbb{R}^2$, denota-se por $i = (1, 0)$ e por $j = (0, 1)$ os vetores que constituem a chamada base canônica de $\mathbb{R}^2$. Dado um elemento $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, tem-se que

$$x = (x_1, x_2) = x_1 \cdot (1, 0) + x_2 \cdot (0, 1) = x_1 \cdot i + x_2 \cdot j.$$

Em outras palavras, qualquer elemento do espaço $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito combinando os elementos de sua base canônica. Analogamente, denota-se por $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$ os vetores que constituem a chamada *base canônica de* $\mathbb{R}^3$. Dado um elemento $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$, tem-se que

$$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (1, 0, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1) = x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k.$$

O que permite dizer que qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito combinando os vetores de sua base canônica.

Definição 1.4 (Base Canônica do espaço $\mathbb{R}^n$)**.** *Os vetores denotados por* $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,..., $e_n = (0, ..., 1)$, *que têm uma única coordenada não nula e igual a* 1, *constituem a base canônica do espaço* $\mathbb{R}^n$*. De forma análoga ao exposto anteriormente para* $\mathbb{R}^2$ *e para* $\mathbb{R}^3$*, dado um elemento* $x = (x_1, ..., x_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*, segue*

$$x = (x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot e_1 + ... + x_n \cdot e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i.$$

Quando o vetor x *é escrito na forma* $x = (x_1, ..., x_n) = x_1.e_1 + ... + x_n.e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$*, diz-se que* x *é uma combinação linear dos elementos da base canônica do espaço* $\mathbb{R}^n$*.*

Dados os pontos $P_1 = (x_1., , , .x_n)$ e $P_2 = (y_1, ..., y_n)$, o vetor determinado pelos pontos P_1 e P_2 é definido por

$$v = P_1P_2 = (y_1 - x_1, ..., y_n - x_n).$$

Exemplo 1.1. *O vetor determinado pelos pontos* $P_1 = (3, 4)$ *e* $P_2 = (-1, 2)$ *é dado por* $v = P_2P_1 = (-4, -2)$*.*

1.2 Produto Interno e Norma em $\mathbb{R}^n$

Existe uma operação em $\mathbb{R}^n$, denominada produto interno, a qual faz com que esse espaço tenha estrutura métrica, ou seja, é possível medir a distância entre dois objetos do espaço. Esta operação será definida agora.

Definição 1.5 (Produto interno ou produto escalar)**.** *Dados* $x = (x_1, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, ..., y_n)$*, elementos de* $\mathbb{R}^n$*. O produto interno usual de* x *com* y *(ou produto escalar) é denotado e definido por*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Exemplo 1.2. *Dados os vetores* $x = (2, 3, -1)$ *e* $y = (-1, 0, 2)$*, o produto interno usual de* x *com* y *é* $\langle x, y\rangle = 2(-1) + 3.0 + (-1)2 = -4$*.*

Da Definição 1.5, nota-se que a cada par de vetores é associado um único número real.

Proposição 1.1 (Propriedades do produto interno)**.** *De uma maneira mais geral, um produto interno em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função* $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*

P1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$*;*

P2) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$*;*

P3) $\langle \alpha.x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$*;*

P4) $\langle x, x \rangle > 0$ *se* $x \neq 0$.

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

1) $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$,

2) $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

3) $\langle x + y, z \rangle = \langle z, x + y \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

4) $\langle x, \alpha.y \rangle = \langle \alpha.y, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

A definição de produto interno usual dá origem a um conceito fundamental da Geometria Analítica: <u>o conceito de norma euclidiana</u>.

Definição 1.6 (Norma em $\mathbb{R}^n$)**.** *Uma norma em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisfaz as seguintes propriedades*

N1) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$*,*

N2) $\|\alpha.x\| = \mid \alpha \mid \|x\|$*,*

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*,*

para quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. A desigualdade N3 é conhecida por desigualdade triangular.*

Definição 1.7 (Norma euclidiana)**.** *Dado* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*, a norma euclidiana de* x *é denotada e definida por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Por definição, tem-se $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Quando $\|x\| = 1$, diz-se que x é um vetor unitário.

Exemplo 1.3. *A norma do vetor* $x = (-1, 3, 4)$ *é* $\|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$.

No plano cartesiano, a norma de um vetor $x = (x_1, x_2)$ coincide com a medida da hipotenusa do triângulo retângulo determinado por x_1 e por x_2. Já no espaço, a norma do vetor $x = (x_1, x_2, x_3)$ coincide com a medida da diagonal do paralelepípedo formado por x_1, x_2 e x_3.

Observação 1.1. *Se* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $x \neq 0$*, então o vetor* $w = \dfrac{1}{\|x\|} \cdot x$ *é unitário, pois*

$$\|w\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1.$$

Exemplo 1.4. *Um vetor unitário na direção do vetor* $x = (1, 2, -3)$ *é o vetor*

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}} \cdot (1, 2, -3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right).$$

Proposição 1.2 (Desigualdade de Schwarz). *Para quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, tem-se*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\|. \tag{1.1}$$

Demonstração. Para todo t real,

$$\langle x + t\,y, x + t\,y \rangle \geq 0.$$

Pela distributividade do produto interno,

$$\langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Como $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$, para todo t, resulta

$$\|x\|^2 + 2t\,\langle x, y \rangle + t^2\,\|y\|^2 \geq 0.$$

Logo,

$$\Delta = (2\,\langle x, y \rangle)^2 - 4\,\|x\|^2\,\|y\|^2 \leq 0$$

e, portanto,

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\|.$$

Ao afirmar que uma função é uma norma, é preciso verificar se tal função está bem definida e, em seguida, verificar se a função atende as propriedades N1, N2 e N3. Sabe-se que a norma euclidiana está bem definida, pois $\langle x, x\rangle$ é estritamente positivo. Resta verificar que a norma euclidiana de fato define uma norma. Para isso, sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

1. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} > 0$ e $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x_1^2 + ... + x_n^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = ... = x_n = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\|\alpha \cdot x\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + ... + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + ... + x_n^2)} =\mid \alpha \mid \|x\|$,
3. $\|x+y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Observação 1.2. *Além da norma euclidiana já introduzida, é importante considerar no $\mathbb{R}^n$ duas outras normas:*

1. *Norma do Máximo:* $|x|_M = \textit{máx}\{\mid x_i \mid, i = 1, ..., n\}$.
2. *Norma da Soma:* $|x|_S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$.

Exemplo 1.5. *Seja o vetor $x = (-1, 2, 1)$. Então, as normas do máximo e da soma são:*

$$|x|_M = \textit{máx}\{\mid x_i \mid, i = 1, 2, 3\} = \textit{máx}\{-1, 2, 1\} = 2,$$
$$|x|_S = \sum_{i=1}^{3} \mid x_i \mid = \mid -1 \mid + \mid 2 \mid + \mid 1 \mid = 4.$$

A definição de produto interno em $\mathbb{R}^n$ permite generalizar a definição de ângulo entre dois vetores x e y. Pela desigualdade de Schwarz, considerando x e y não nulos, obtém-se

$$\mid \langle x, y\rangle \mid \leq \|x\|\|y\| \Longleftrightarrow \frac{\mid \langle x, y\rangle \mid}{\|x\|\|y\|} \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

Como é conhecido, se θ é um ângulo cuja medida varia entre 0 e π, então $\cos\theta$ percorre todos os valores entre -1 e 1. Este fato, juntamente com as desigualdades anteriores, permitem a seguinte definição: se θ é o ângulo formado pelos vetores x e y, então

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Exemplo 1.6. *Dados os vetores $x = (4, -2)$ e $y = (3, 1)$ a medida do ângulo formado entre x e y é dada por*

$$\cos\theta = \frac{4.3 + (-2).1}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{4} rad$*.*

Exemplo 1.7. *Dados os vetores* $x = (2, 2, -1)$ *e* $y = (5, -3, 2)$*, a medida do ângulo formado entre* x *e* y *é dada por*

$$\cos\theta = \frac{2\,(5) + 2\,(-3) + (-1)\,2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3\sqrt{38}}.$$

Logo, $\theta = \arccos\left(\dfrac{2}{3\sqrt{38}}\right)$.

Definição 1.8 (Vetor ortogonal)**.** *Os vetores* x *e* y *são ortogonais quando o ângulo* θ *formado por eles tem medida de* $\theta = 90^o$ *e, portanto,* $\cos\theta = \cos 90^o = 0$*. Consequentemente,* $\langle x, y\rangle = 0$*. Neste caso, denota-se por* $x \perp y$*.*

Exemplo 1.8. *Os vetores* $x = (-1, 3)$ *e* $y = (6, 2)$ *são ortogonais, pois* $\langle x, y\rangle = -1 \times 6 + 3 \times 2 = 0$*.*

Exemplo 1.9. *O vetor nulo* $0 = (0, ..., 0)$ *é ortogonal a qualquer vetor* x*, pois* $< 0, x >= 0$*.*

Exemplo 1.10. *Os vetores* e_i *e* e_j *são ortogonais, quando* $i \neq j$*.*

Exemplo 1.11. *Seja* $x \in \mathbb{R}^n$ *um vetor não nulo. Para todo* $y \in \mathbb{R}^n$*, o vetor* $w = y - \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x$ *é ortogonal a* x*, pois*

$$\langle x, w\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot \langle x, x\rangle = 0.$$

No Exemplo 1.11, fazendo $y = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x + w$, vê-se que, uma vez dado um vetor não nulo $x \in \mathbb{R}^n$, todo vetor $y \in \mathbb{R}^n$ se escreve como soma de um múltiplo de x com um vetor ortogonal a x. Esta decomposição é única, pois se $y = \alpha \cdot x + w$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e w ortogonal a x; tem-se que

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \alpha \cdot x + w\rangle = \alpha \langle x, x\rangle + \langle w, x\rangle = \alpha \langle x, x\rangle.$$

Então, $\alpha = \langle x, y\rangle / \langle x, x\rangle$.

Definição 1.9 (Projeção Ortogonal)**.** *O vetor*

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x$$

recebe o nome de projeção ortogonal de y sobre (a reta que contém) x e é denotado por

$$Proj_x y = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x.$$

Exemplo 1.12. *A projeção do vetor $y = (3, 2)$ sobre o vetor $x = (-1, 2)$ é o vetor*

$$Proj_x y = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x = \left(\frac{-3+4}{1+4}\right) \cdot (-1, 2) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Proposição 1.3 (Regra do Paralelogramo)**.** *Se x e y são vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.2}$$

Demonstração. Calculando $\|x + y\|^2$ e $\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2$, segue:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \tag{1.3}$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \tag{1.4}$$

Somando 1.3 com 1.4, membro a membro, obtém-se 1.2.

Geometricamente, a regra do paralelogramo afirma que a soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados dos seus quatro lados. Uma aplicação de vetores ortogonais é o Teorema de Pitágoras em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1 (Pitágoras). *Se x e y são vetores ortogonais de $\mathbb{R}^n$, então*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{1.5}$$

Demonstração. Basta observar que $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Uma norma dá origem à noção de distância entre dois pontos, como definido abaixo:

Definição 1.10 (Distância entre dois pontos)**.** *Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$. A distância de x a y é definida e denotada por*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Exemplo 1.13. *Sejam os pontos $x = (1, 2)$ e $y = (3, 1)$. A distância entre x e y é dada por*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Exemplo 1.14. *Sejam os pontos $x = (1, 2, 3)$ e $y = (-1, 0, 4)$. A distância entre x e y é dada por*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(1 + 1)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Proposição 1.4 (Propriedades da distância)**.** *As três condições que definem uma norma implicam que $d(x, y)$ tem as propriedades características de uma distância, a saber:*

d1) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \iff x = y$*,*

d2) $d(x, y) = d(y, x)$*,*

d3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

Uma consequência simples das propriedades N1, N2 e N3 é que, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, tem-se que

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|\,.$$

Com efeito, a desigualdade acima significa que

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\,,$$

ou seja, que

$$\|y\| \leq \|x\| + \|x - y\|$$

e

$$\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\|\,.$$

Isto se segue de N1, pois $y = x + (y - x)$ e $x = y + (x - y)$.

1.3 Produto Vetorial

A noção de produto vetorial é motivada pelo fato de que, para a solução de vários problemas em Geometria, é necessário encontrar um vetor ortogonal a dois outros vetores não colineares conhecidos. Nesta seção, apresenta-se um breve estudo a respeito deste produto entre vetores.

Definição 1.11 (Produto vetorial)**.** *Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ vetores do espaço $\mathbb{R}^3$. O produto vetorial entre u e v, denotado por $u \wedge v$, é definido por*

$$u \wedge v = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

ou

$$u \wedge v = det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} .i - det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix} .j + det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} .k$$

Observação 1.3. *Pode-se também utilizar a notação*

$$u \wedge v = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

para se lembrar da definição de produto vetorial. Mas cuidado, rigorosamente, o determinante de ordem três não faz sentido, pois a primeira linha da matriz contém vetores e as demais números reais.

De acordo com a Definição 1.11, para cada par de vetores do espaço $\mathbb{R}^3$ associa-se um único vetor que foi chamado de produto vetorial. Uma propriedade notável do produto vetorial é que ele é um vetor ortogonal aos vetores dados. De fato,

$$\langle u, u \wedge v \rangle = x_1.(y_1z_2 - z_1y_2) + y_1.(z_1x_2 - x_1z_2) + z_1.(x_1y_2 - y_1x_2) = 0.$$

O mesmo ocorre para $\langle v, u \wedge v \rangle$, o que mostra que os vetores u e v são ortogonais a $u \wedge v$.

Exemplo 1.15. *Dados os vetores* $u = (5, 4, 3)$ *e* $v = (1, 0, 1)$*, o produto vetorial entre* u *e* v *é dado por*

$$u \wedge v = (4 - 0).i + (3 - 5).j + (0 - 4).k = (4, -2, -4).$$

Proposição 1.5 (Propriedades do produto vetorial)**.** *Dados* $u = (x_1, y_1, z_1)$*,* $v = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $w = (x_3, y_3, z_3)$ *vetores de* $\mathbb{R}^3$ *e* α *um número real, as seguintes propriedades são válidas para qualquer que seja* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *de* $\mathbb{R}^3$*:*

P1) $u \wedge u = 0$*;*

P2) $(u \wedge v) = -(v \wedge u)$*;*

P3) $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$*;*

P4) $(\alpha.u) \wedge v = \alpha(u \wedge v)$*;*

P5) $u \wedge v = 0$*, se e somente se , um dos vetores é nulo ou se* u *e* v *são paralelos;*

P6) O triedro $\{u, v, u \wedge v\}$ é positivamente orientado, ou seja, o determinante cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores dados na ordem em que são listados é positivo (em relação ao sistema de coordenadas xyz);

P7) $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2$ (Identidade de Lagrange);

P8) Se u e v são vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ e θ é o ângulo formado entre u e v, tem-se que

$$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta;$$

Demonstração. P1)
Para qualquer que seja $u = (x_1, y_1, z_1)$ de $\mathbb{R}^3$, $u \wedge u = 0$. De fato, pela definição de produto vetorial

$$u \wedge u = (y_1z_1 - z_1y_1)i + (z_1x_1 - x_1z_1)j + (x_1y_1 - y_1x_1)k = (0, 0, 0) = 0.$$

Como consequência desta propriedade, tem-se $i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$. As provas das demais propriedades seguem facilmente da definição e são deixadas para o leitor.

Exemplo 1.16. *Seja $ABCD$ um paralelogramo em que $u = AB$ e $v = AC$. A altura do paralelogramo relativa aos lados CD e AB é dada por $\|v\| \sin\theta$, em que θ denota o ângulo formado entre os vetores u e v. Assim, a área do paralelogramo é dada por*

$$\text{Área} = \|v\|(\|v\| \sin\theta) = \|u \wedge v\|.$$

Portanto, dados dois vetores u e v de $\mathbb{R}^3$, a norma do produto vetorial de u com v representa, numericamente, a área do paralelogramo determinado pelos vetores u e v.

Exemplo 1.17. *Dados os pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (3, -1, 0)$ e $C = (4, 2, -2)$, a área do triângulo ABC é dada por $\frac{1}{2}\|u \wedge v\|$. Como $u = AB = (1, -2, -1)$ e $v = AC = (2, 1, -3)$, segue que*

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\|u \wedge v\| = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\|(7, 1, 5)\| = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Definição 1.12 (Produto misto)**.** *Dados os vetores u, v e w de $\mathbb{R}^3$, o número real*

$$\langle u, v \wedge w\rangle$$

denomina-se produto misto dos vetores u, v e w, tomados nessa ordem. O produto misto de u, v e w será denotado por (u, v, w).

Exemplo 1.18. *O produto misto dos vetores $u = (2, -1, 3)$, $v = (1, 0, 0)$ e $w = (0, 1, 0)$, tomados nessa ordem é*

$$(u, v, w) = \langle (2, -1, 3), (0, 0, 1) \rangle = 3.$$

Note que, v e w correspondem aos vetores canônicos i e j e, com isso, $v \times w = (0, 0, 1)$.

Proposição 1.6 (Propriedades do produto vetorial)**.** *Dados os vetores u, v, w e a de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:*

P1) $(u, v, w) = 0$ *se, e somente se, um dos vetores for nulo ou se os vetores estiverem no mesmo plano;*

P2) $(u, v, w) = -(v, u, w) = +(v, w, u)$*;*

P3) $(u + a, v, w) = (u, v, w) + (a, v, w)$*;*

P4) $(\alpha.u, v, w) = \alpha.(u, v, w)$*.*

1.4 Retas e Planos

Uma reta no plano xy é determinada quando se conhece um ponto e uma direção (inclinação ou coeficiente angular da reta). Analogamente, uma reta no espaço $\mathbb{R}^3$ é determinada quando se conhece um ponto $A = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ e uma direção $v = (a, b, c)$.

Seja r uma reta que passe pelo ponto $A = (x_1, y_1, z_1)$ e tem direção do vetor não nulo $v = (a, b, c)$, como ilustrada na Figura 1.1.

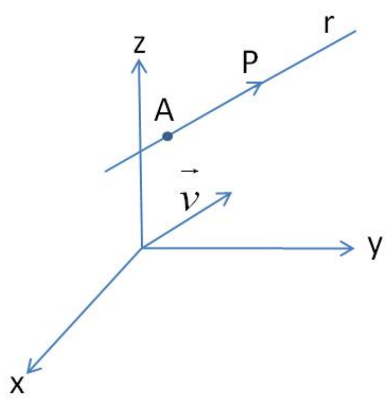

Figura 1.1: Ilustração da reta r no espaço.

Se o ponto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pertence à reta r, é preciso que os vetores AP e v sejam paralelos, isto é, que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$AP = tv. \tag{1.6}$$

De fato, como $AP = P - A$, segue que

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c). \tag{1.7}$$

Definição 1.13 (Equação vetorial da reta)**.** *Qualquer uma das equações anteriores [Eqs. 1.6 e 1.7] recebe o nome de equação vetorial da reta r. O vetor v é chamado de vetor diretor da reta r e t é denominado parâmetro.*

Note que, cada valor do parâmetro t fornece um vetor posição de um ponto de r. Em outras palavras, a medida que t varia, a reta é traçada pela ponta desse vetor posição. Observe que

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \Longleftrightarrow (x, y, z) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc), \tag{1.8}$$

ou seja,

$$x = x_1 + at \quad y = y_1 + bt \quad z = z_1 + ct, \tag{1.9}$$

em que t é um número real.

Definição 1.14 (Equações paramétricas)**.** *As Eqs. 1.8 e 1.9 são chamadas de equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $v = (a, b, c)$.*

Exemplo 1.19. *A equação vetorial de uma reta que passa pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e tem a direção do vetor $(1, 4, -2)$ é dada por*

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 4, -2).$$

A partir da equação vetorial, obtém-se as equações paramétricas dessa reta

$$x = 1 + t \quad y = 2 + 4t \quad z = 3 - 2t.$$

Escolhendo o valor do parâmetro $t = 1$, obtém-se $x = 2$, $y = 6$ e $z = -1$; assim, $(2, 6, -1)$ é um ponto da reta.

Observação 1.4. *A reta definida pelos pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é a reta* *que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor $v = AB$.*

Exemplo 1.20. *A reta r, determinada pelos pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (-1, 3, 4)$ tem a direção do vetor $v = AB = (-2, 1, -1)$ e suas equações paramétricas são dadas por*

$$x = 1 - 2t \quad y = 2 + t \quad z = 5 - t.$$

Outra maneira de descrever uma reta r é eliminando o parâmetro t nas equações paramétricas. Se nenhum dos números a, b e c for zero, pode-se isolar t em cada uma das equações e igualar os resultados, obtendo

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \tag{1.10}$$

Definição 1.15 (Equações simétricas)**.** *A Eq. 1.10 é denominada equações simétricas da reta r.*

Observe que os números a, b e c que aparecem nos denominadores da Eq. 1.10 são as componentes do vetor diretor da reta r. Mesmo que uma das componentes desse vetor seja nula, pode-se eliminar o parâmetro t. Por exemplo, se $a = 0$, as equações simétricas da reta são escritas na forma:

$$x = x_1 \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

Geometricamente, esse fato indica que a reta pertence ao plano vertical $x = x_1$.

Exemplo 1.21. *As equações simétricas da reta que passa pelos pontos $A = (2, 4, -3)$ e $B = (3, -1, 1)$ são*

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}.$$

Sejam r e s retas com vetores diretores $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. A condição de paralelismo das retas r e s é a mesma dos vetores v_1 e v_2 (os quais definem as direções das retas), isto é:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Analogamente, a condição de ortogonalidade das retas r e s é a mesma dos vetores v_1 e v_2, isto é:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Exemplo 1.22. *As retas de equações $(r) : (2, -3, 5) + t(1, 2, 4)$ e $(s) : (3, 5, 9) + t(2, 4, 8)$ são paralelas, pois os vetores diretores $v_1 = (1, 2, 4)$ e $v_2 = (2, 4, 8)$ são paralelos. Note que $v_2 = 2v_1$.*

Exemplo 1.23. *As retas de equações* $(r) : (1, -2, 4) + t(2, 3, 1)$ *e* $(s) : (1, 3, -3) + t(-1, 2, -2)$ *são perpendiculares, pois os vetores diretores* $v_1 = (2, 3, 1)$ *e* $v_2 = (-1, 2, -2)$ *são tais que* $< v_1, v_2 >= 0$.

Seja $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $n = (a, b, c)$ um vetor, não nulo, normal (ortogonal) ao plano, como ilustrado na Figura 1.2.

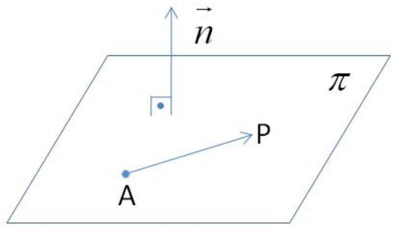

Figura 1.2: Ilustração do ponto A, do plano π e do vetor n.

Como n é perpendicular ao plano π, segue que n é ortogonal a qualquer vetor em π, então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor AP é ortogonal a n, isto é,

$$< n, (P - A) >= 0,$$

ou seja,

$$< (a, b, c), (x - x_1, y - y_1, z - z_1) >= 0,$$

ou, ainda

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0.$$

Fazendo $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, obtém-se a equação

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{1.11}$$

Definição 1.16 (Equação do plano)**.** *A Eq. 1.11 é denominada equação geral do plano* π.

Assim, como $n = (a, b, c)$ é um vetor normal a π, qualquer vetor $k.n$, em que k é um número real não nulo, também é um vetor normal ao plano. É importante notar que os três coeficientes a, b e c da equação geral do plano representam as componentes de um vetor normal ao plano.

Exemplo 1.24. *Se a equação geral de um plano* π *é dada por* $\pi : 3x + 2y - z + 1 = 0$, *um de seus vetores normais é* $n = (3, 2, -1)$.

Para se obter pontos de um plano dado por uma equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas das variáveis e calcular o valor da outra na equação dada. Assim, por exemplo, se na equação anterior $x = 4$ e $y = -2$, tem-se:

$$3(4) + 2(-2) - z + 1 = 0 \Longrightarrow 12 - 4 - z + 1 = 0 \Longrightarrow z = 9.$$

Portanto, o ponto $A = (4, -2, 9)$ pertence a este plano.

Exemplo 1.25. *A equação geral do plano π, que passa pelo ponto $A = (2, -1, 3)$ e tem $n = (3, 2, -4)$ como um vetor normal, é dada por*

$$3x + 2y - 4z + d = 0.$$

Sendo A um ponto do plano, suas coordenadas devem verificar a equação, isto é,

$$3(2) + 2(-1) - 4(3) + d = 0 \Longrightarrow 6 - 2 - 12 + d = 0 \Longrightarrow d = 8.$$

Logo, a equação geral do plano π é $3x + 2y - 4z + 8 = 0$.

Definição 1.17 (Equação segmentária)**.** *Se um plano π intercepta os eixos coordenados nos pontos $(p, 0, 0), (0, q, 0)$ e $(0, 0, r)$ com $pqr \neq 0$, então π admite a equação*

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

a qual é denominada equação segmentária do plano π.

Definição 1.18 (Planos paralelos e concorrentes)**.** *Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ dois planos quaisquer. Os planos π_1 e π_2 são paralelos quando seus vetores normais são paralelos. Por outro lado, Os planos π_1 e π_2 são concorrentes quando seus vetores normais não são paralelos. Em particular, dois planos concorrentes são perpendiculares quando seus vetores normais são ortogonais.*

Para exemplificar a Definição 1.18, nas Figuras 1.3, 1.4 e 1.5 são apresentados exemplos de planos paralelos (coincidentes e distintos) e concorrentes.

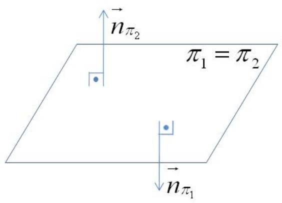

Figura 1.3: Planos paralelos coincidentes.

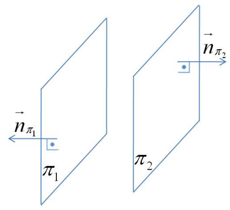

Figura 1.4: Planos paralelos distintos.

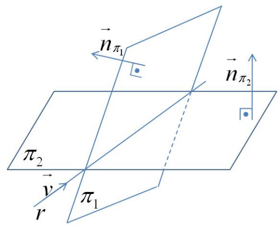

Figura 1.5: Planos concorrentes.

1.5 Cônicas

O objetivo desta seção é buscar uma compreensão de três curvas importantes no estudo de Geometria Analítica: Elipse, Hipérbole e Parábola.

Considere duas retas que não são perpendiculares e que se interceptam no ponto V. Ao fixar uma das retas como eixo e efetuar uma rotação com a outra ao redor desse eixo, obtém-se um sólido denominado *cone circular reto* com vértice V, como ilustrado na Figura 1.6.

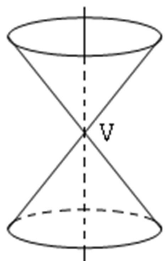

Figura 1.6: Cone Circular Reto.

Note que o ponto V divide o cone em duas partes, chamadas *folhas*. Mas, qual é a relação que existe entre esse tal cone circular reto e as curvas citadas? O fato é que a elipse, hipérbole e parábola são originadas a partir desse tal cone. Com isso, pode-se definir:

Definição 1.19 (Seção cônica)**.** *Uma secção cônica (ou simplesmente cônica) é definida pela interseção de um plano com um cone circular reto. As três seções cônicas básicas* *são a parábola, a elipse e a hipérbole.*

Na Figura 1.7, são ilustradas as três seções cônicas básicas.

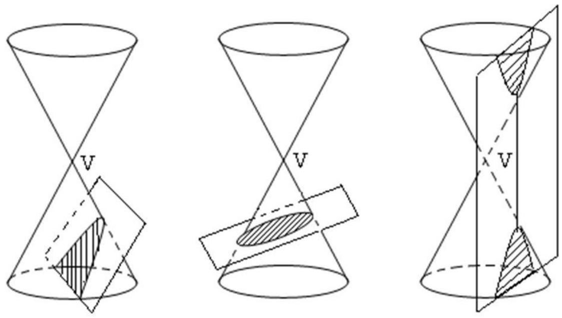

Figura 1.7: Seções cônicas básicas: parábola, elipse e hipérbole (da esquerda para direita).

Historicamente, o matemático grego Pappus de Alexandria $(290 - 350)$, atribuiu ao geômetra grego Aristeu (o Ancião) $(370 - 300)$ a.C. o crédito de ter publicado o primeiro tratado sobre as seções cônicas, referindo-se aos Cinco livros sobre seções cônicas de Aristeu, nos quais foi apresentado um estudo cuidadoso das curvas cônicas e as suas propriedades.

Segundo Pappus, o matemático grego Euclides de Alexandria $(325-265)$ a.C., contemporâneo de Aristeu, conhecia muito bem os cinco livros sobre as curvas cônicas e evitou aprofundar-se sobre esse assunto na sua obra Os elementos, de modo a obrigar os leitores interessados a consultar a obra original de Aristeu. Duzentos anos mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga $(262-190)$a.C. recompilou e aprimorou os resultados de Aristeu e de Euclides nos oito livros da sua obra Seções Cônicas. No entanto, a História indica que as cônicas foram descobertas pelo matemático grego Menaecmus $(380 - 320)$ a.C. aproximadamente quando estudava como resolver os três problemas famosos da Geometria grega: a triseção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Segundo o historiador Proclus, Menaecmus nasceu em Alopeconnesus, na Ásia Menor (o que hoje é a Turquia), foi aluno de Eudóxio na academia de Platão.

Menaecmus foi o primeiro em mostrar que as elipses, parábolas e hipérboles são obtidas cortando um cone com um plano não paralelo a sua base. Mesmo assim, pensava-se que os nomes dessas curvas foram inventados por Apolônio, porém traduções de antigos escritos árabes indicam a existência desses nomes em épocas anteriores a Apolônio.

1.5.1 Elipse

Certo dia, um jardineiro, quando fazia a manutenção semanal do jardim, resolveu fazer uma curva no gramado de modo a plantar rosas na região delimitada por esta curva. O jardineiro construiu a curva da seguinte forma: fincou duas estacas no terreno e amarrou nelas as extremidades de uma corda maior do que a distância entre as estacas. Assim, desenhou a curva no solo com o auxílio de um graveto apoiado na corda, mantendo-a o mais esticada possível. O procedimento realizado pelo jardineiro para construir a curva é mostrado na Figura 1.8. Essa curva, que o jardineiro construiu, é denominada elipse. Apresenta-se agora, a definição precisa e formal de uma elipse.

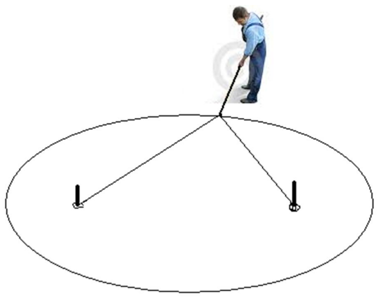

Figura 1.8: Curva (elipse) construída pelo jardineiro.

Definição 1.20 (Elipse)**.** *Uma elipse, $\mathcal{E}$, de focos F_1 e F_2, é o conjunto de pontos P de um plano, cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante, que será denotada por $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c$, ou seja,*

$$\mathcal{E} = \{P; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a > d(F_1, F_2)\}.$$

A Definição 1.20 representa a elaboração matemática da curva que o jardineiro construiu em seu jardim, em que as estacas representam os focos da elipse.

Na Figura 1.9, são mostrados a elipse e seus elementos notáveis, os quais são descritos na sequência.

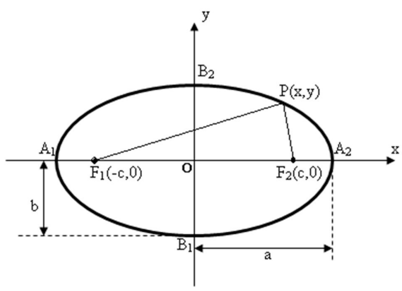

Figura 1.9: Elipse e seus elementos notáveis.

Definição 1.21 (Terminologia)**.** *Como apresentado na Definição 1.20 e Figura 1.9, pode-se definir os seguintes elementos em uma elipse:*

- *os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse;*
- *a reta que contém os focos é a reta focal, que será denotada por l;*
- *a intersecção da elipse com a reta focal l consiste de exatamente dois pontos A_1 e A_2, chamados vértices da elipse sobre a reta focal.*
- *o segmento A_1A_2 é denominado eixo focal da elipse, cujo comprimento é $2a$.*
- *o ponto médio C, do eixo focal A_1A_2, é o centro da elipse. Esse ponto é também o ponto médio do segmento F_1F_2, delimitado pelos focos;*
- *a reta l', que passa pelo centro C e é perpendicular a reta focal, é a reta não focal;*
- *a elipse intercepta a reta não focal l' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2, denominados vértices da elipse sobre a reta não focal.*
- *o segmento B_1B_2 é denominado eixo não focal da elipse e seu comprimento é $2b$, em que $b^2 = a^2 - c^2$;*
- *os números a e b são, respectivamente, a distância do centro aos vértices sobre a reta focal e a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal. Aqui, c é distância do centro aos focos;*
- *o número $e = \dfrac{c}{a}$, em que $0 \leq e < 1$, é denominado excentricidade da elipse.*

Com respeito à excentricidade, é importante mencionar que ela é uma medida que mostra o quanto os pontos da elipse estão próximos de uma circunferência ou de um segmento de reta. Em outras palavras, fixada a medida $2a$ do eixo focal, tem-se que: quanto mais próximos estiverem os focos, mais próximos de uma circunferência estarão os pontos da elipse e, quanto mais distintas estiverem os focos, mais próximos de um segmento de reta estarão os pontos da elipse. Assim, quanto mais próximo de zero estiver o número $e = \frac{c}{a}$, mais próximos de uma circunferência estarão os pontos da elipse; e, quanto mais próximo de 1 estiver número e, mais próximos de um segmento de reta estarão os pontos da elipse.

Logo, assumindo $c = 0$ na Definição 1.20, a elipse se reduz a uma circunferência de centro em C e raio a, pois, nesse caso, $F_1 = F_2 = C$ e, portanto,

$$\mathcal{E} = \{P; d(P, C) = a\}.$$

Em particular, $e = 0$ se, e somente se, a elipse é uma circunferência.

Proposição 1.7. *A elipse de focos nos pontos* $F_1 = (-c, 0)$ *e* $F_2 = (c, 0)$ *e vértices em* $A_1 = (-a, 0)$*,* $A_2 = (a, 0)$*,* $B_1 = (0, -b)$ *e* $B_2 = (0, b)$ *tem por equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração. Seja $\mathcal{E}$ a elipse mencionada e P um ponto de $\mathcal{E}$. Então, utilizando a definição de elipse, tem-se que

$$P \in \mathcal{E} \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Agora, utilizando a distância entre dois pontos, segue que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

o qual equivale escrever que

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Após simplificações, tem-se

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Logo, chega-se a

$$(a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

e, portanto,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Proposição 1.8. *A elipse de focos nos pontos* $F_1 = (0, -c)$ *e* $F_2 = (0, c)$ *e vértices em* $A_1 = (0, -a)$*,* $A_2 = (0, a)$*,* $B_1 = (-b, 0)$ *e* $B_2 = (b, 0)$ *tem por equação*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Demonstração. Análoga a anterior.

Para ilustrar a Proposição 1.8, uma elipse com a reta focal no eixo y é mostrada na Figura 1.10.

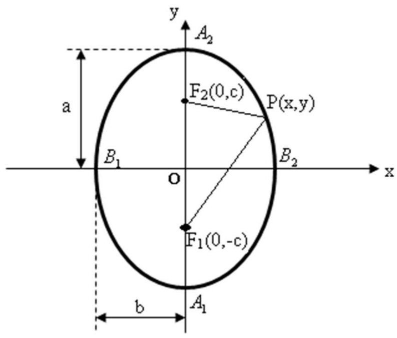

Figura 1.10: Elipse coma reta focal no eixo y.

Exemplo 1.26. *Considere uma elipse cujos focos são os pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$ e sua excentricidade é igual a $\frac{2}{3}$. Tem-se que a reta focal é o eixo das abscissas, o centro da elipse é a origem $C(0,0)$, $c=2$ e $e=\frac{2}{3}=\frac{c}{a}\Longrightarrow a=3$. Logo, $b^2=a^2-c^2=9-4=5$. Portanto a equação da elipse é*

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

Exemplo 1.27. *Considere uma elipse com centro na origem e um de seus vértices sobre a reta focal é $(0,7)$. Se a elipse passa pelo ponto $(\sqrt{5},\frac{14}{3})$, então a reta focal que contém o centro e o vértice dado, é o eixo das ordenadas. A distância do centro $C(0,0)$ ao vértice $A_2=(0,7)$ é $a=7$ e o outro vértice na reta focal é $A_1(0,-7)$. Logo a equação da elipse é da forma*

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{7^2}=1.$$

Como $(\sqrt{5},\frac{14}{3})\in\mathcal{E}$, tem-se que

$$\frac{\sqrt{5}}{b^2}+\frac{\frac{14}{3}}{49}=1\Longrightarrow\frac{5}{b^2}=1-\frac{4}{9}\Longrightarrow b^2=9.$$

Assim, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1.$$

Nos Exemplos e , os centros das elipses estavam na origem do sistema. Caso as elipses não possuam centro na origem do sistema, como obter as equações descritas anteriormente? Nesse caso, pode-se proceder da mesma forma. Todavia, seria muito mais trabalhoso. Para resolver esse problema, faz-se uso da translação de eixos para se obter as equações de uma elipse com centro em um ponto qualquer. Utilizando a translação de eixos, estuda-se agora as equações de uma elipse com centro fora da origem.

Proposição 1.9. *A equação da elipse com centro no ponto $O^{'}(h,k)$ e eixo focal paralelo ao eixo x é*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Demonstração. Considere a Figura 1.11, a qual ilustra a elipse com centro no ponto (h,k).

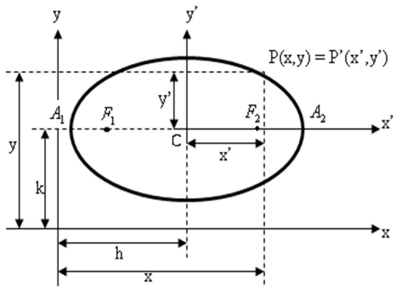

Figura 1.11: Elipse com centro no ponto (h,k).

Como o centro $O^{'}(h,k)$ pertence a reta focal, tem-se que que $y=k$ é a equação cartesiana da reta focal. Além disso, como $d(F_1,O^{'})=d(F_2,O^{'})=c$, em que$F_1$ e F_2 são os focos da elipse, segue que $F_1=(h-c,k)$ e $F_2=(h+c,k)$. Seja um ponto $P(x^{'}+h,y^{'}+k)$ pertencente a elipse, em que x e y são suas coordenadas no sistema xOy e $x^{'}$ e $y^{'}$ são suas coordenadas no sistema $x^{'}O^{'}y^{'}$, obtidas transladando o sistema xOy para a origem (h,k). Então,

$$P\in\mathcal{E}\iff d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a,$$

ou seja,

$$d((x^{'}+h,y^{'}+k),(x_0-c,y_0))+d((x^{'}+h,y^{'}+k),(h+c,k))=2a,$$

o que equivale escrever que

$$d((x^{'},y^{'}),(-c,0))+d((x^{'},y^{'}),(c,0))=2a$$

portanto

$$\frac{(x^{'})^2}{a^2}+\frac{(y^{'})^2}{b^2}=1\iff\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Proposição 1.10. *A equação da elipse com centro no ponto $O^{'}(h, k)$ e eixo focal paralelo ao eixo y é*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Demonstração. Análoga ao caso anterior.

Exemplo 1.28. *Considere a elipse de equação*

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

Para que a equação possa ser analisada, deve-se colocá-la na forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Primeiramente, agrupa-se os termos de mesma variável

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 - 36y) = -4$$

ou

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4,$$

em que se coloca em evidência os números 4 e 9 para facilitar a construção de trinômios quadrados nestes dois parênteses. Então,

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4(1) + 9(4)$$

ou

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36.$$

Dividindo ambos os membros da equação anterior por 36, obtém-se

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Agora, comparando esta última equação com a equação padrão, segue que o centro da elipse é o ponto $C(1, 2)$. Mas,

$$a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3 \quad b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2.$$

Logo, os vértices são dados por

$$A_1(-2, 2), A_2(4, 2), B_1(1, 0), B_2(1, 4).$$

Para determinar os focos, é preciso conhecer o valor de c:

$$9 = 4 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{5}.$$

Portanto, os focos são

$$F_1(1-\sqrt{5},2) \quad F_2(1+\sqrt{5},2)$$

e a excentricidade é dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

1.5.2 Hipérbole

Definição 1.22 (Hipérbole)**.** *Uma hipérbole, $\mathcal{H}$, de focos F_1 e F_2, é o conjunto de pontos P de um plano tais que o módulo da diferença das distâncias a F_1 e a F_2 é igual a uma constante, $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos, ou seja,*

$$\mathcal{H} = \{P; \mid d(P,F_1) - d(P,F_2) \mid = 2a < d(F_1,F_2)\}.$$

Uma hipérbole com a reta focal no eixo x é ilustrada na Figura 1.12.

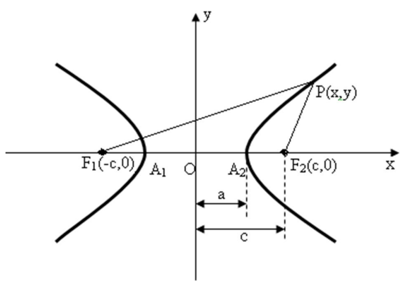

Figura 1.12: Hipérbole com a reta focal no eixo x.

Definição 1.23 (Terminologia)**.** *Como apresentado na Definição 1.22 e Figura 1.12, pode-se definir os seguintes elementos em uma hipérbole:*

- *os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole;*
- *a reta l, que contém os focos, é a reta focal;*
- *a intersecção da hipérbole com a reta focal l consiste de exatamente dois pontos A_1 e A_2, chamados de vértices da hipérbole;*

- *o segmento A_1A_2 é denominado eixo focal da hipérbole e seu comprimento é $dist(A_1A_2) = 2a$;*

- *o ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o centro da hipérbole. Esse ponto também é o ponto médio do segmento F_1F_2, delimitado pelos focos;*

- *a reta l', que passa pelo centro C e é perpendicular a reta focal, é a reta não focal da hipérbole. Como l' é a mediatriz do segmento F_1F_2, a hipérbole não intercepta a reta não focal l', pois se $P \in l'$, tem-se*

$$\mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 0 \neq 2a.$$

- *o segmento B_1B_2 perpendicular ao eixo focal, que tem C como ponto médio e comprimento $2b$, em que $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado eixo não focal da hipérbole, e B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole;*

- *o número $e = \dfrac{c}{a}$ é denominado a excentricidade da hipérbole, em que $e > 1$, pois $c > a$.*

- *o retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo que tem os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados e as retas que contém as diagonais de retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ são as assíntotas de $\mathcal{H}$, como ilustrado na Figura 1.13.*

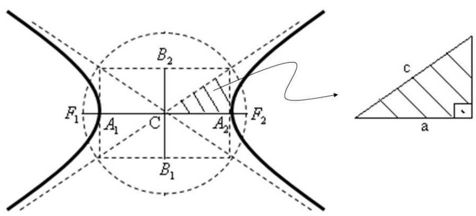

Figura 1.13: Retângulo de base da hipérbole.

- *as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem coeficiente angular $\pm\frac{b}{a}$ em relação a reta focal.*

Com respeito à excentricidade, é importante mencionar que ela é uma medida que mostra o quanto os pontos da hipérbole se aproximam de duas retas que passam pelos seus vértices paralelamente ao eixo não focal ou o quanto esses pontos se aproximam da reta que contém o eixo focal. Quanto maior o número $e = \frac{c}{a}$, mais próximos de duas retas paralelas estarão os pontos da hipérbole; quanto menor o número $e = \frac{c}{a}$, mais próximos da reta que contém o eixo focal estarão os pontos da hipérbole.

Com respeito ao retângulo da base, pelo teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base de $\mathcal{H}$ têm comprimento $2c$ e a distância do centro de $\mathcal{H}$ a qualquer vértice do retângulo de base é igual a c.

Definição 1.24 (Hipérbole equilátera)**.** *Uma hipérbole é denominada equilátera se o comprimento do eixo focal é igual ao comprimento do eixo não focal, isto é, $a = b$.*

Definição 1.25 (Hipérbole conjugadas)**.** *Duas hipérboles, tais que o eixo focal de cada uma é igual ao eixo não focal da outra, são denominadas hipérboles conjugadas. Como os retângulos de base de duas hipérboles conjugadas são iguais, elas têm o mesmo centro, as mesmas assíntotas e os focos uma mesma distância do centro.*

Proposição 1.11. *A equação da hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo das abscissas é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. Nesse caso, tem-se que $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ e $C(0, 0)$. Logo,

$$P(x, y) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 2a.$$

Mas,

$$\mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chega-se a

$$P(x, y) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Longleftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da última igualdade por a^2b^2, segue que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Proposição 1.12. *A equação da hipérbole, de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo das ordenadas, é dada por*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. Neste caso, tem-se que $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$, $A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$. Procedendo como no caso anterior, obtém-se a equação da hipérbole, a qual é ilustrada na Figura 1.14.

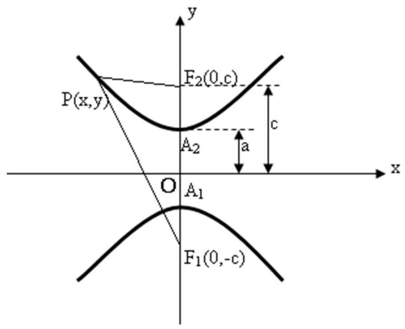

Figura 1.14: Hipérbole com a reta focal no eixo y.

Exemplo 1.29. *Considere a hipérbole $9x^2 - 7y^2 - 63 = 0$. Observe que a equação dada pode ser escrita como*

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

o qual é a equação da hipérbole com eixo focal coincidente com o eixo das abscissas. Agora,

$$a^2 = 7 \Longrightarrow a = \sqrt{7} \;\; e \;\; b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3,$$

e, para se determinar os focos, precisa-se do valor de c, o qual é obtido como:

$$c^2 = 7 + 9 \Longrightarrow c = 4.$$

Logo, os focos são $F_1(-4,0)$ e $F_2(4,0)$. Por fim, a excentricidade da hipérbole é dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{7}}.$$

Exemplo 1.30. *Considere a hipérbole equilátera com focos nos pontos $(-\sqrt{8},0)$ e $(\sqrt{8},0)$. Como $F_1(-\sqrt{8},0)$ e $F_2(\sqrt{8},0)$, segue que o centro da hipérbole é $C = \dfrac{F_1+F_2}{2} = (0,0)$ e a reta focal é o eixo das abscissas. Sendo a hipérbole equilátera, tem-se que $a = b$. Como $c = \sqrt{8}$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtém-se $8 = a^2 + a^2 = 2a^2$, isto é, $a^2 = 4$. Logo, $a = b = 2$ e*

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

é a equação da hipérbole.

Exemplo 1.31. *A excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$. De fato, como*

$a = b$ e $c^2 = a^2 + b^2$, segue que $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$. Logo, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$.

Exemplo 1.32. *Considere uma hipérbole em que seus vértices são os pontos $(0, 3)$ e $(0, -3)$ e, um de seus focos é o ponto $(0, 5)$. A hipérbole tem centro $C(0, 0)$; reta focal dada por $x = 0$, $c = 5$, $a = 3$; e $(0, -5)$ é o outro foco; $b^2 = c^2 - a^2 = 16$. Então,*

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1,$$

é a equação da hipérbole, $y = \pm\frac{4y}{3}$ são suas assíntotas e $2a = 6$ é o comprimento do seu eixo focal.

Proposição 1.13. *A equação da hipérbole, com centro no ponto (h, k) e reta focal paralela ao eixo das abscissas, é dada por*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. Como o centro $O^{'}(h, k)$ pertence a reta focal, tem-se que $l : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal. Além disso, como

$$d(F_1, O^{'}) = d(F_2, O^{'}) = c,$$

em que F_1 e F_2 são os focos da elipse, segue que $F_1(h - c, k)$ e $F_2(h + c, k)$. Seja $P(x^{'} + h, y^{'} + k)$ um ponto pertencente a hipérbole, em que

$$x = x^{'} + h \qquad y = y^{'} + k$$

são suas coordenadas no sistema xOy; e $x^{'}$ e $y^{'}$ são suas coordenadas no sistema $x^{'}O^{'}y^{'}$, obtido transladando o sistema xOy para a origem $O^{'}(h.k)$. Então,

$$P \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 2a,$$

ou seja,

$$\mid d((x^{'} + h, y^{'} + k), (x_0 - c, y_0)) - d((x^{'} + h, y^{'} + k), (h + c, k)) \mid = 2a,$$

que é equivalente à relação

$$\mid d((x^{'}, y^{'}), (-c, 0)) - d((x^{'}, y^{'}), (c, 0)) \mid = 2a.$$

Logo, tem-se que

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Na Figura 1.15, é ilustrada uma hipérbole com centro no ponto (h, k).

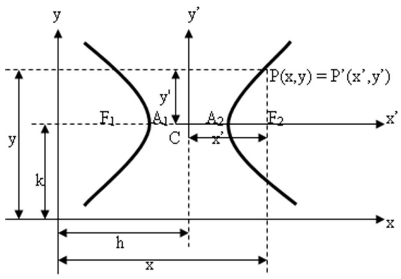

Figura 1.15: Hipérbole com centro no ponto (h, k).

Proposição 1.14. *A equação da hipérbole, com centro no ponto (h, k) e reta focal paralela ao eixo das ordenadas, é dada por*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. Análoga ao caso anterior.

Exemplo 1.33. *Considere a hipérbole de equação*

$$x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0.$$

Separando os termos de mesma variável e completando os quadrados, obtém-se

$$(y-1)^2 - \frac{(x+3)^2}{2} = 1.$$

Logo, a equação representa uma hipérbole com:

- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ *e* $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$;
- *centro:* $C(-3, 1)$;
- *reta focal:* $l : x = -3$ *paralela ao eixo das ordenadas;*
- *reta não focal:* $l' : y = 1$ *paralela ao eixo das abscissas;*
- *vértices:* $A_1(-3, 0)$ *e* $A_2(-3, 2)$;

- *vértices imaginários (na reta não focal):* $B_1(-3-\sqrt{2},1)$ *e* $B_2(-3+\sqrt{2},1)$*;*
- *focos:* $F_1(-3,1-\sqrt{3},)$ *e* $F_2(-3,1+\sqrt{3})$*;*
- *assíntotas:* $(x+3)=\pm\sqrt{2}(y-1)$*, ou seja,* $x+\sqrt{2}y=-3+\sqrt{2}$ *e* $x-\sqrt{2}y=-3-\sqrt{2}$*.*

Exemplo 1.34. *As assíntotas de uma hipérbole não se intersectam. De fato, pode-se supor, sem perda de generalidade (escolhendo o sistema de coordenadas de maneira adequada), que a hipérbole é dada pela equação*

$$\mathcal{H}:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ou seja,

$$\mathcal{H}:b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

Como $r_+:bx-ay=0$ *e* $r_-:bx+ay=0$ *são as assíntotas da hipérbole e*

$$\mathcal{H}:(bx-ay)(bx+ay)=a^2b^2,$$

segue que

$$r_+\cap\mathcal{H}=\emptyset$$

e

$$r_-\cap\mathcal{H}=\emptyset,$$

pois

$$(bx-ay)(bx+ay)=0\neq a^2b^2$$

se $(x,y)\in r_+\cup r_-$*.*

1.5.3 Parábola

Com uma mangueira de água, uma garoto dirige o jato obliquamente para cima e observa a trajetória percorrida pela água. Essa trajetória é parte de uma curva denominada parábola.

Definição 1.26 (Parábola)**.** *Seja* $\mathcal{L}$ *uma reta no plano e* F *um ponto no plano não pertencente a* $\mathcal{L}$*. A parábola* $\mathcal{P}$*, de diretriz* $\mathcal{L}$ *e foco* F*, é o conjunto que consiste de todos os pontos* P *do plano que são equidistantes do ponto* F *e da reta* $\mathcal{L}$*, ou seja,*

$$\mathcal{P}=\{P;d(P,F)=d(P,\mathcal{L})\}.$$

Definição 1.27 (Terminologia)**.** *Como apresentado na Definição 1.26, os elementos da parábola são:*

- *o ponto F é o foco e a reta $\mathcal{L}$ é chamada diretriz da parábola.*
- *a reta l, que contém o foco e é perpendicular a diretriz $\mathcal{L}$, é chamada reta focal da parábola.*
- *o vértice da parábola é o ponto V da reta focal, que equidista de F e de $\mathcal{L}$;*
- *se A é o ponto em que $\mathcal{L}$ intersecta l, então V é o ponto médio do segmento AF, ou seja,*
$$V = \frac{A+F}{2};$$
- *o número $d(P, \mathcal{L}) = 2p$ é o parâmetro da parábola, em que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.*

Aqui estabelece-se as equações da parábola em relação a um sistema de coordenadas xOy no plano. Considera-se primeiro os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados, e depois os casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

Proposição 1.15. *A equação da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das abscissas e foco a direita da diretriz é dada por*

$$y^2 = 4px,$$

a qual é ilustrada na Figura 1.16.

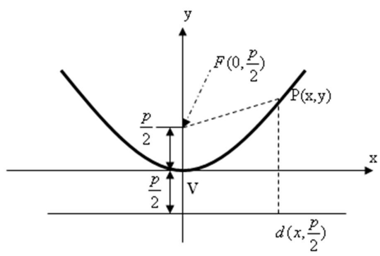

Figura 1.16: Parábola com vértice na origem e reta focal no eixo x.

Demonstração. Como o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é $V(0,0)$, então o foco e a diretriz são, respectivamente, $F(p,0)$ e $\mathcal{L}: x = -p$, em que $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo,

$$P(x,y) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow d(P,F) = d(P,\mathcal{L}).$$

Da última igualdade acima, segue que

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \mid x + p \mid,$$

ou equivalente à equação

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2.$$

Portanto, chega-se a

$$y^2 = 4\,p\,x.$$

Proposição 1.16. *A equação da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das abscissas e foco a esquerda da diretriz é dada por*

$$y^2 = -4\,p\,x,$$

a qual é ilustrada na Figura 1.17.

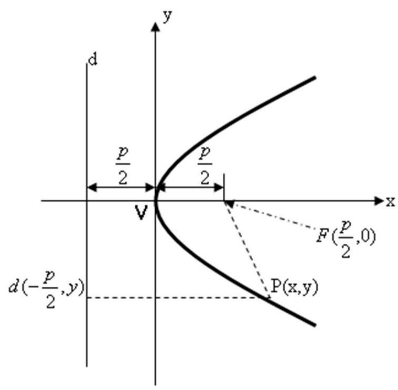

Figura 1.17: Parábola com vértice na origem e reta focal no eixo y.

Demonstração. Neste caso, $F(-p,0)$ e $\mathcal{L}: x = p$, em que $2p = d(F,\mathcal{L})$. Então,

$$P(x,y) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow d(P,F) = d(P,\mathcal{L}).$$

Da última igualdade acima, segue que

$$\sqrt{(x+p)^2 + y^2} = \mid x - p \mid$$

ou equivalente à equação

$$(x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2.$$

Portanto, disso segue que

$$y^2 = -4\,p\,x.$$

Proposição 1.17. *A equação da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das ordenadas e foco acima da reta diretriz é dada por*

$$x^2 = 4\,p\,y.$$

Demonstração. Neste caso, $F(0,p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, em que $d(F,\mathcal{L}) = 2p$. Logo,

$$P(x,y) \in \mathcal{P} \iff d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \iff \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \mid y+p \mid \iff x^2 = 4\,p\,y.$$

Proposição 1.18. *A equação da parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das ordenadas e foco abaixo da diretriz é dada por*

$$x^2 = -4\,p\,y.$$

Demonstração. Neste caso, $F(0,-p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, em que $d(F,\mathcal{L}) = 2p$. Logo,

$$P(x,y) \in \mathcal{P} \iff d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \iff \sqrt{x^2 + (y+p)^2} = \mid y-p \mid \iff x^2 = -4\,p\,y.$$

Exemplo 1.35. *Considere a parábola de equação $x^2 - 8y = 0$. Como $x^2 = 8y$, a equação representa uma parábola com as seguintes características:*

- *vértice: $V(0,0)$;*
- *reta focal: eixo Oy: $x = 0$;*
- *parâmetro: $p = 2$;*
- *foco: $F(0,2)$; acima da diretriz;*
- *diretriz: $y = -2$.*

Exemplo 1.36. *Considere uma parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, cuja reta focal é o eixo y e que passa pelo ponto $(4,-2)$. A parábola tem equação*

$$x^2 = \pm 4\,p\,y,$$

em que $p = d(V, P) > 0$. *Como* $(4, -2) \in \mathcal{P}$, *tem-se que* $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ *e* $16 = 8p$. *Logo,* $p = 2$; $F(0, -2)$, $\mathcal{L} : y = 2$ *e a equação da parábola é*

$$\mathcal{P} : x^2 = -8y.$$

Proposição 1.19. *A equação da parábola com vértice no ponto* $V(x_0, y_0)$, *reta focal paralela ao eixo das abscissas e foco a direita da diretriz é dada por*

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Demonstração. Sabe-se que a equação da parábola no sistema de coordenadas $x^{'}O^{'}y^{'}$ é dada por

$$(y^{'})^2 = 4px^{'}.$$

Além disso, nesse sistema de coordenadas, o foco é $F(p, 0)$, o vértice é $V(0, 0)$, a diretriz é $\mathcal{L} : x^{'} = -p$, sendo a reta focal $l : y^{'} = 0$. Como $x = x^{'} + h$ e $y = y^{'} + k$, conclui-se que a equação da parábola no sistema xOy é $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Proposição 1.20. *A equação da parábola com vértice na origem, reta focal paralela ao eixo das abscissas e foco à esquerda da diretriz é dada por*

$$(y - k)^2 = -4p(x - h).$$

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 1.19.

Como nos casos anteriores, seja um sistema de eixos ortogonais $x^{'}O^{'}y^{'}$ com origem $O^{'} = V(h, k)$ e eixos $O^{'}x^{'}$ e $O^{'}y^{'}$ paralelos e de igual sentido aos eixos x e y, respectivamente, obtém-se as equações e os elementos das parábolas com vértice $V(h, k)$ e reta focal paralela ao eixo das ordenadas. Na próxima proposição, esse assunto será detalhado.

Proposição 1.21. *A equação da parábola com vértice* $V(h, k)$, *reta focal paralela ao eixo das ordenadas e foco acima da diretriz é dada por*

$$(x - h)^2 = 4p(y - k),$$

a qual é ilustrada na Figura 1.18.

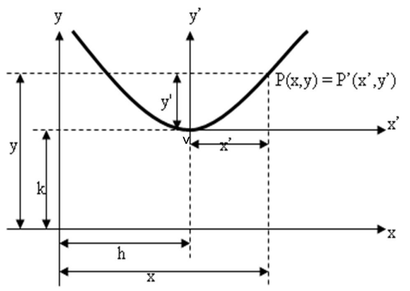

Figura 1.18: Parábola com Vértice no ponto (h, k) e reta focal no eixo x.

Demonstração. Para realizar a demonstração dessa proposição, basta considerar $F(h, k+p)$, diretriz $\mathcal{L} : y = k - p$ e usar a definição de parábola.

Proposição 1.22. *A equação da parábola com vértice no ponto $V(h, k)$, reta focal paralela ao eixo das ordenadas e foco abaixo da diretriz é dada por*

$$(x - h)^2 = -4p(y - k).$$

Demonstração. Análogo ao caso anterior, basta considerar $F(h, k - p)$, diretriz $\mathcal{L} : y = k + p$ e usar a definição de parábola.

Exemplo 1.37. *Considere a parábola, cuja equação é*

$$2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0.$$

A equação dada pode ser reescrita da seguinte forma

$$2(y^2 + 4y) = -5x + 7.$$

Após completar o quadrado, obtém-se

$$2(y + 2)^2 = -5x + 15.$$

Logo,

$$(y + 2)^2 = \frac{-5}{2}(x - 3)$$

representa uma parábola com as seguintes características:

- *vértice:* $V(3, -2)$*;*
- *reta focal:* $l = y = -2$*;*

- *parâmetro:* $2p = \frac{10}{8}$, *então,* $p = \frac{5}{8}$;
- *foco:* $(3 - \frac{5}{8}, -2) = (\frac{19}{8}, -2)$ *a esquerda da diretriz;*
- *diretriz:* $\mathcal{L} : x = 3 + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$.

Exemplo 1.38. *Pretende-se obter a equação de uma parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V(3,4)$ e foco $F(3,2)$. Como $V(3,4)$ e $F(3,2)$, a reta focal é $l : x = 3$ e, nessa reta, F está abaixo de V e, portanto, abaixo da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma*

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -4p(y-4).$$

Assim, $p = d(V,F) = d((3,4),(3,2)) = 2$. Logo a diretriz é $\mathcal{L} : y = 6$ e

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$$

é a equação da parábola.

1.6 Superfícies Quádricas

Pelo nome genérico de *quádrica*, designa-se algumas superfícies do espaço que podem ser consideradas, por assim dizer, a versão tridimensional das cônicas. O objetivo deste capítulo, é defini e exemplificar as principais superfícies quádricas.

Definição 1.28 (Quádricas)**.** *Uma quádrica é uma superfície cuja equação cartesiana é uma equação de segundo grau nas variáveis x, y e z, isto é, uma equação da forma*

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + 2\,d\,x\,y + 2e\,x\,z + 2\,f\,y\,z + m\,x + n\,y + p\,z + q = 0. \tag{1.12}$$

em que pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f é diferente de zero.

Observe que, se a superfície quádrica, definida pela Eq. 1.12, for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de intersecção será uma cônica. Assim, pode-se definir traço:

Definição 1.29 (Traço)**.** *A intersecção de uma superfície com um plano é chamada traço da superfície no plano.*

Exemplo 1.39. *O traço da superfície da definição no plano $z = 0$ é a cônica dada pela equação*

$$a\,x^2 + b\,y^2 + 2\,d\,x\,y + m\,x + n\,y + q = 0,$$

contida no plano $z = 0$, isto é, no plano xy.

Estuda-se alguns casos particulares em que a Eq. 1.12 assume, por meio de translações e rotações. Nas próximas subseções, tais casos são apresentados.

1.6.1 Elipsoide

Definição 1.30 (Elipsoide)**.** *O elipsoide é a superfície, ilustrada na Figura 1.19, representada pela equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

em que todos os coeficientes dos termos do primeiro membro dessa equação são positivos, sendo que a, b e c representam as medidas dos semi eixos do elipsoide.

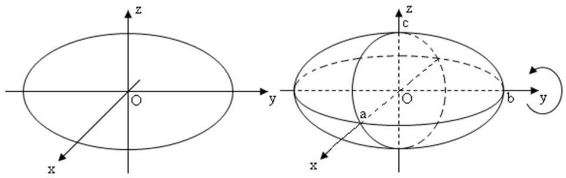

Figura 1.19: Elipsoide.

Embora a terra seja usualmente modelada por uma esfera, um modelo mais preciso é o elipsoide, pois a rotação da terra causa um achatamento nos pólos.

O traço no plano xy é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por outro lado, os traços nos planos xz e yz são as elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

respectivamente.

Se pelo menos dois dos valores a, b e c são iguais, o elipsoide é de revolução. Por exemplo, se $a = c$, o elipsoide é obtido girando a elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

do plano yz em torno do eixo das ordenadas.

No caso de $a = b = c$, a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

toma a forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

e representa uma *superfície esférica* de centro $C(0, 0, 0)$ e raio a.

Se o centro do elipsoide é o ponto $C(x_0, y_0, z_0)$ e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, sua equação assumi a forma

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

obtida através de uma translação de eixos.

De maneira análoga, a superfície esférica de centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raio a, tem equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Exemplo 1.40. *A equação*

$$2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$$

representa um elipsoide de centro na origem, pois pode ser escrita na forma

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Exemplo 1.41. *A equação*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0,$$

a qual pode ser reescrita como (após completamento de quadrados)

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 16,$$

representa uma superfície esférica de centro na origem e raio igual a 4.

1.6.2 Hiperboloide de uma Folha

Definição 1.31 (Hiperboloide de uma Folha)**.** *A equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa um hiperboloide de uma folha ao longo do eixo z, como ilustrada na Figura 1.20.

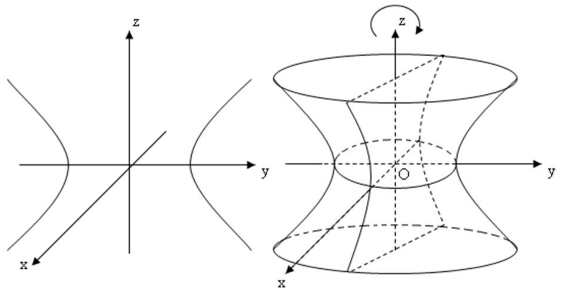

Figura 1.20: Hiperboloide de uma folha ao longo do eixo z.

Por outro lado, as equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representam hiperboloides de uma folha ao longo dos eixos das ordenadas e das abscissas, respectivamente.

Em termos de engenharia, em geral, as torres de resfriamento para reatores nucleares são usualmente projetadas na forma de hiperboloides de uma folha, por razões de estabilidade estrutural.

O traço no plano xy da equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Já os traços nos planos xz e yz são as hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

respectivamente.

Um traço no plano $z = k$ é uma elipse que aumenta sua área a medida que o plano se afasta do plano xy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles.

Definição 1.32 (Hiperboloide de revolução). *Se, na equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ocorrer $a = b$, o hiperboloide é denominado de revolução, ou seja, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo não focal, no caso, o eixo z.

1.6.3 Hiperboloide de Duas Folhas

Definição 1.33 (Hiperboloide de Duas Folhas). *A equação*

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

representa um hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo y, como ilustrada na Figura 1.21.

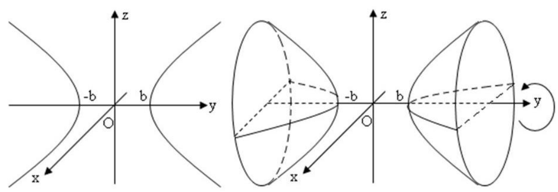

Figura 1.21: Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo y.

Por outro lado, as equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representam hiperboloides de duas folhas ao longo do eixo das abscissas e do eixo z, respectivamente.

Os traços da superfície

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

nos planos xy e yz são, respectivamente, as hipérboles

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

e

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

O plano xy não intercepta a superfície, nem qualquer plano $y=k$, em que $\mid k \mid < b$. Se $\mid x \mid > b$, o traço no plano $y=k$ é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{b^2}-1.$$

Os traços nos planos $x=k$ e $z=k$ são hipérboles. Se, na equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ocorrer $a=c$, o hiperboloide é denominado de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo focal. O traço no plano $y=k, \mid x \mid > b$, é a circunferência

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2}-1.$$

1.6.4 Paraboloide Elíptico

Definição 1.34 (Paraboloide Elíptico)**.** *A equação*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz,$$

representa um paraboloide elíptico ao longo do eixo z, como ilustrado na Figura 1.22.

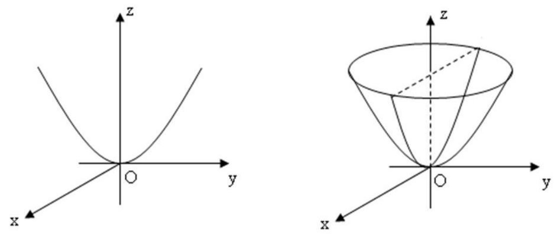

Figura 1.22: Paraboloide elíptico ao longo do eixo z.

Por outro lado, as equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

representam paraboloides elípticos ao longo dos eixos das ordenadas e abscissas, respectivamente.

Os chamados paraboloides circulares, que são obtidos pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo, são usados para coletar e refletir luz, som e sinais de rádio e televisão. Em um radiotelescópio, por exemplo, sinais das estrelas distantes que atingem a bacia são refletidos para o receptor no foco e assim amplificados. O mesmo princípio, se aplica a microfones e antenas de satélite na forma de paraboloides.

Dada a superfície de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz,$$

seu traço no plano xy é a origem $(0, 0, 0)$ e os traços nos planos xz e yz são as parábolas

$$\frac{x^2}{a^2} = cz$$

$$\frac{y^2}{b^2} = cz,$$

respectivamente.

Caso $c > 0$, a superfície situa-se inteiramente acima do plano xOy e, para $c < 0$, a superfície situa-se inteiramente abaixo deste plano. Assim, o sinal de c coincide com o de z, pois caso contrário não haveria tal superfície.

Um traço no plano $z = k$, $k > 0$, é uma elipse que aumenta de tamanho a medida que o plano se afasta do plano xOy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

Se na equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz,$$

ocorrer $a = b$, o paraboloide é dito de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola

$$\frac{y^2}{b^2} = cz$$

em torno do eixo z. Neste caso, o traço no plano $z = k$ é uma circunferência.

1.6.5 Paraboloide Hiperbólico

Definição 1.35 (Paraboloide Hiperbólico)**.** *A equação*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

representa um paraboloide hiperbólico ao longo do eixo z, como ilustrado na Figura 1.23.

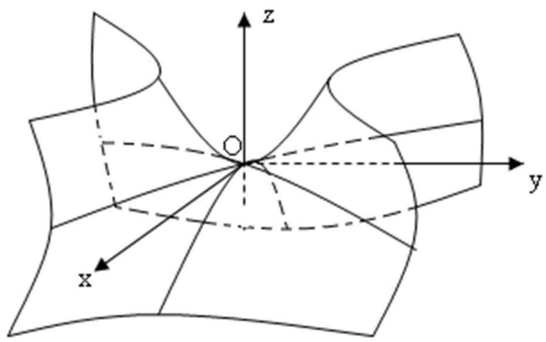

Figura 1.23: Paraboloide hiperbólico ao longo do eixo z.

Já as equações

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

representam paraboloides hiperbólicos situados ao longo dos eixos y e x, respectivamente.

O traço da superfície

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz,$$

no plano xy, é o par de retas

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

e os traços nos planos xz e yz são as parábolas

$$-\frac{x^2}{a^2} = cz$$

e

$$\frac{y^2}{b^2} = cz,$$

que tem o eixo z como eixo de simetria e concavidade para baixo e para cima, respectivamente.

O traço no plano $z = k$ é uma hipérbole, com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas, caso k seja positivo; e paralelo ao eixo das abscissas, caso k seja negativo. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

1.6.6 Superfície Cônica

A expressão *superfície cônica* lembra algo familiar. A ideia de superfície cônica é uma superfície gerada por uma reta que se move apoiada numa curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva. Formalmente, define-se da seguinte forma:

Definição 1.36 (Superfície cônica)**.** *Seja γ uma curva contida num plano π do espaço e V um ponto não pertencente a π. A superfície cônica S, de diretriz γ e vértice V, é a superfície gerada por todas as retas que passam por V e por algum ponto de γ, ou seja,*

$$S = \{V + t(VP); P \in \gamma, t \in \mathbb{R}\},$$

a qual é ilustrada na Figura 1.24.

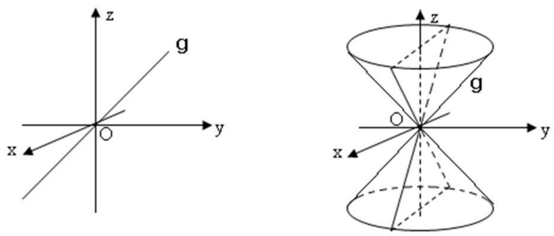

Figura 1.24: Superfície cônica.

O conjunto de retas $S = \{V + t(VP); t \in \mathbb{R}\}$, com $P \in \gamma$, são as geratrizes g da superfície cônica.

Seja o caso particular da superfície cônica, cuja diretriz é uma elipse (ou circunferência) com o vértice na origem do sistema e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados.

Nessas condições, a superfície cônica, cujo eixo é o eixo z tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

O traço no plano xy é o ponto $(0, 0, 0)$. O traço no plano yz tem equações

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

de onde obtêm-se duas retas que passam pela origem:

$$y = \frac{b}{a}z$$

e

$$y = -\frac{b}{a}z.$$

O traço no plano xz, de forma análoga, é constituído por duas retas que passam pela origem. Os traços nos planos $z = k$ são elipses e se $a = b$ são circunferências. Neste caso, tem-se a superfície cônica *circular reta*. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles. As superfícies cônicas cujos eixos são os eixos das abscissas e das ordenadas, tem equações

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

e

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

respectivamente.

1.6.7 Superfície Cilíndrica

Informalmente, uma superfície cilíndrica é uma superfície gerada por uma reta que se move paralelamente a uma outra reta fixa em contato permanente com um curva plana. Assim, pode-se definir superfície cilíndrica como:

Definição 1.37 (Superfície Cilíndrica)**.** *Seja γ uma curva contida num plano π do espaço e v um vetor não nulo e não paralelo ao plano π. A superfície cilíndrica S de diretriz γ e geratrizes paralelas ao vetor v é o conjunto*

$$S = \{P + tv; P \in \gamma, t \in \mathbb{R}\},$$

o qual é ilustrado na Figura 1.25

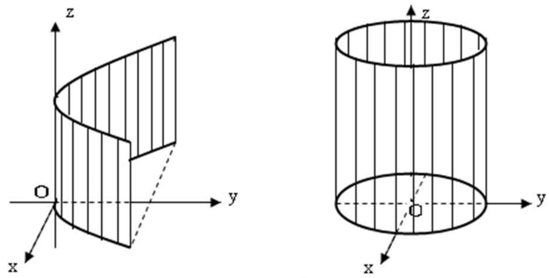

Figura 1.25: Superfície cilíndrica.

Considera-se apenas superfícies cilíndricas, cuja diretriz é uma curva que se encontra em um dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado não contido no plano. Neste caso, a equação da superfície cilíndrica é a mesma de sua diretriz.

Exemplo 1.42. *Se a equação da diretriz for $x^2 = 2y$, a equação da superfície cilíndrica também será $x^2 = 2y$.*

Conforme a diretriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada de circular, elíptica, hiperbólica ou parabólica.

Agora note que, em geral, o gráfico de uma equação que não contém uma determinada variável corresponde a uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo ausente e cuja diretriz é o gráfico da equação dada no plano correspondente.

Exemplo 1.43. *A equação*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

representa uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao eixo das ordenadas, sendo a diretriz uma elipse no plano xz.

1.7 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 1.1. *Determine o vetor $v = P_1P_2$, se*

a) $P_1 = (1, 2, 1)$ *e* $P_2 = (-5, 3, 1)$

b) $P_1 = (-3, 2, -1)$ *e* $P_2 = (15, 2, 6)$

c) $P_1 = (1, 0, -9)$ *e* $P_2 = (-5, 12, 5)$

Exercício 1.2. *Dados $x = (x_1, ..., x_n)$,$y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$ o produto interno de x por y é definido por*

$$\langle x, y\rangle = x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Considerando $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $\langle x, y\rangle$ atende as seguintes propriedades:

a) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

b) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *e* $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

c) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$ *e* $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$

d) $\langle x, x\rangle > 0$ *se* $x \neq 0$

Exercício 1.3. *Dados os vetores $x = (-1, 2, 7)$ e $y = (-8, -5, -9)$, obtenha $\langle x, y\rangle$.*

Exercício 1.4. *Determine a norma euclidiana dos seguintes vetores*

a) $x = (2, 3, 4)$

b) $y = (-2, -5, 2)$

c) $w = (0, 2, 7)$

Exercício 1.5. *Determine a distância de P_1 a P_2 se*

a) $P_1 = (1, 2, 1)$, $P_2 = (-5, 3, 1)$

b) $P_1 = (-3, 2, -1)$, $P_2 = (15, 2, 6)$

c) $P_1 = (4, 24, 18)$, $P_2 = (-25, 23, 11)$

Exercício 1.6. *Determine um vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de cada vetor do exercício 4.*

Exercício 1.7. *Se u e v são vetores de $\mathbb{R}^n$, mostre que $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$, em que θ denota o ângulo formado entre os vetores u e v.*

Exercício 1.8. *Determine a medida do ângulo formado pelos vetores x e y do exercício 4.*

Exercício 1.9. *Determine o valor de k de modo que os vetores $x = (3, -2k, 4)$ e $y = (1, 2, 5)$ sejam ortogonais.*

Exercício 1.10. *Sejam $P_1 = (2, 9, 8)$, $P_2 = (6, 4, -2)$ e $P_3 = (7, 15, 7)$. Verifique que P_1P_2 e P_1P_3 são ortogonais.*

Exercício 1.11. *Se x e y são vetores de $\mathbb{R}^n$ com $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, $x \neq 0$, mostre que existe $\alpha \geq 0$ tal que $y = \alpha x$.*

Exercício 1.12. *Determine $u \wedge v$ se*

a) $u = (-1, 2, -1)$ *e* $v = (-5, 3, 1)$

b) $u = (-1, -2, -1)$ *e* $v = (1 - 2, -6)$

c) $u = (0, 2, -1)$ *e* $v = (-5, 0, 1)$

Exercício 1.13. *Sejam u e v vetores do espaço $\mathbb{R}^3$. Mostre que $u \wedge v$ é ortogonal a u e a v.*

Exercício 1.14. *Calcule a área do triângulo de vértices $A = (1, -2, 1)$, $B = (2, -1, 4)$ e $C = (-1, -3, 3)$.*

Exercício 1.15. *Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $A = (2, 3, -7)$ e tem direção $v = (1, 2, 3)$.*

Exercício 1.16. *Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A = (2, 3, 5)$ e tem direção $i = (1, 0, 0)$.*

Exercício 1.17. *Determine a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A = (3, -1, 4)$ e $B = (4, -3, -1)$.*

Exercício 1.18. *Seja o plano $\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$. Determine*

a) O ponto de π que tem abscissa 4 e ordenada 3;

b) O ponto de π que tem abscissa 1 e cota 2;

c) O valor de k para que o ponto $P = (2, k + 1, k)$ pertença ao plano π.

Exercício 1.19. *Determine a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (2, -1, 3)$, sendo $n = (3, 2, -4)$ um vetor normal a π.*

Exercício 1.20. *Estabeleça a equação geral do plano determinado pelos pontos $A = (2, 1, -1)$, $B = (0, -1, 1)$ e $C = (1, 2, 1)$.*

Exercício 1.21. *Determine a equação do plano paralelo ao plano $2x + 3y - 6z = 3$ e que passa por $P = (1, 1, 1)$.*

Exercício 1.22. *Represente geometricamente os seguintes planos:*

$$
\begin{array}{llllll}
a)\ x = 2 & b)\ x = -2 & c)\ y = 2 & d)\ y = -2 & e)\ z = 4 & f)\ z = -4 \\
g)\ y = 0 & h)\ x = 0 & i)\ z = 0 & j)\ x + y + z = 1 & k)\ 2x + y + z = 0 & l)\ x + y + z = 1
\end{array}
$$

Exercício 1.23. *Determinar os vértices A_1 e A_2, os focos e a excentricidade das elipses dadas.*

a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{81} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

c) $x^2 + 25y^2 = 25$

Exercício 1.24. *Apresente a equação da elipse que satisfaz as condições dadas:*

a) Centro $C(0,0)$, um foco $F(\frac{3}{4},0)$ e um vértice $A(1,0)$

b) Vértices $A(0,\pm 6)$ e passando por $P(3,2)$

c) Vértices $A_1(1,-4)$ e $A_2(1,8)$ e excentricidade $e = \dfrac{2}{3}$.

Exercício 1.25. *Determine o centro, os focos e a excentricidade de cada elipse a seguir:*

a) $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$

b) $25x^2 + 16y^2 + 50x + 64y - 311 = 0$

c) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$

Exercício 1.26. *As equações a seguir representam hipérboles. Para cada uma delas, determine os vértices, os focos e a excentricidade.*

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

b) $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{64} = 1$

c) $x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$

Exercício 1.27. *Determinar a equação da hipérbole que satisfaz as condições dadas:*

a) focos $F(\pm 5,0)$, vértices $A(\pm 3,0)$.

b) vértices em $(5,-2)$ e $(3,-2)$, um foco em $(7,-2)$.

c) focos em $(3,4)$ e $(3,-2)$, excentricidade $e = 2$.

Exercício 1.28. *Determinar os elementos principais de cada parábola a seguir:*

a) $x^2 = -12y$

b) $y^2 = -100x$

c) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$

Exercício 1.29. *Estabelecer a equação de cada uma das parábolas sabendo que:*

a) vértice: $V(0,0)$ *e diretriz* $y = -2$

b) foco: $F(2,0)$ *e diretriz* $x + 2 = 0$

c) vértice: $V(-4,3)$ *e foco* $F(-4,1)$

Exercício 1.30. *Defina superfície quádrica.*

Exercício 1.31. *Determine a natureza das seguintes superfícies quádricas*

$a)$ $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$	$b)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$	$c)$ $z - 4(x^2 + y^2)$
$d)$ $x^2 - y^2 + z^2 = 0$	$e)$ $x^2 + y^2 = 9$	$f)$ $9x^2 - 18x + 9y^2 + 4z^2 + 16z - 11 = 0$
$g)$ $4x^2 + 9y^2 = 36z$	$h)$ $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$	$i)$ $x^2 + y^2 = z$

Exercício 1.32. *Esboce cada superfície quádrica do exercício 24.*

Exercício 1.33. *Represente geometricamente o conjunto* $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \| (x,y,z) \| = 1\}$.

Exercício 1.34. *Determinar a equação de cada uma das superfícies esféricas definidas pelas seguintes condições*

a) Centro $C = (1,0,4)$ *e raio 5;*

b) Centro no ponto médio do segmento $A = (-1,3,5-5)$ *e* $B = (5,-1,-3)$ *e raio 7;*

c) O segmento de extremidades $A = (-1,3,5-5)$ *e* $B = (5,-1,-3)$ *é um de seus diâmetros.*

Exercício 1.35. *Mostre que o plano* $2x - y - 2z = 10$ *intercepta o paraboloide* $z = \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8}$ *num único ponto e determine esse ponto.*

Capítulo 2

Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais

Funções de várias variáveis aparecem de maneira natural em diversas áreas do conhecimento. Pode-se usar uma função para descrever, por exemplo, a temperatura em diferentes pontos de uma placa de metal. Assim, a cada ponto P da placa, associa-se a sua temperatura $T(P)$. A determinação do ponto da placa consiste de duas informações: uma latitude e uma longitude. Em outras palavras, a temperatura da placa depende de duas grandezas. Neste capítulo, apresenta-se uma introdução as funções que dependem de mais de uma grandeza.

2.1 Funções de Duas Variáveis Reais a Valores Reais

Definição 2.1 (Função de Duas Variáveis)**.** *Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, em que A é um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^2$. Uma tal função associa, a cada par $(x, y) \in A$, um único número real denotado por $z = f(x, y)$. O conjunto A é denominado domínio da função e será denotado por $D(f)$. As variáveis x e y são as variáveis independentes e a variável z é a variável dependente. O conjunto imagem da função f é o conjunto definido e denotado por*

$$Im(f) = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}.$$

Nos próximos exemplos, aplica-se a Definição 2.1.

Exemplo 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x+2y$. O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{R}^2$. Observe que, dado, $P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, a imagem do elemento P*

através da função f é dada por $f(P) = f(1,2) = 5$. Essa função é chamada, em Álgebra Linear, de funcional linear.

Por simplificação, muitas vezes, não será especificado o domínio da função, sendo implícito que trata-se do maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para o qual faz sentido a regra em questão.

Exemplo 2.2. *Dada a função $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, o domínio de f é o conjunto*

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Geomentricamente, o domínio de f é um círculo de raio 1 e centro na origem.

Exemplo 2.3. *O domínio da função $f(x,y) = \ln(x + y - 2)$ é o conjunto*

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 2\}.$$

Geomentricamente, o domínio de f é o conjunto de pontos do plano que estão acima da reta de equação $x + y = 2$.

Definição 2.2 (Função Polinomial)**.** *Uma função polinomial de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \sum_{m+n \leq p} a_{mn} x^m y^n,$$

em que p é um número natural fixo e os a_{mn} são números reais dados; a soma é estendida a todas as soluções (m,n), m e n naturais, da desigualdade $m + n \leq p$.

Exemplo 2.4. *A função $f(x,y) = 4x^3y^2 - 2xy + 1$ é uma função polinomial, enquanto que a função $g(x,y) = \frac{1}{5}x^8y^2 + 2xy^{\sqrt{2}}$ não é uma função polinomial.*

Definição 2.3 (Função Racional)**.** *Uma função f dada por $f(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$, em que p e q são funções polinomiais, denomina-se função racional. O domínio de f é o conjunto $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; q(x,y) \neq 0\}$.*

Exemplo 2.5. *A função $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ é uma função racional e seu domínio é o conjunto*

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq -x\}.$$

Geometricamente, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, exceto uma reta passando pela origem com coeficiente angular -1.

Definição 2.4 (Função Homogênea)**.** *Uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, denomina-se função homogênea de grau λ se*

$$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x, y),$$

para todo $t > 0$ e para todo $(x, y) \in A$, tais que $(tx, ty) \in A$.

Exemplo 2.6. *A função $f(x, y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$ é homogênea de grau -2, pois*

$$f(tx, ty) = \frac{2}{t^2(x^2 + y^2)} = t^{-2} f(x, y).$$

Por outro lado, o domínio dessa função é $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0\}$.

Exemplo 2.7. *A função $f(x, y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$ é homogênea de grau -1, pois*

$$f(tx, ty) = \frac{txe^{\frac{tx}{ty}}}{t^2(x^2 + y^2)} = t^{-1} f(x, y).$$

Por outro lado, o domínio dessa função é $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

2.2 Funções de Três ou Mais Variáveis Reais a Valores Reais

Definição 2.5 (Função de Três Variáveis)**.** *Uma função de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, em que A é um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^3$. Nesse caso, associa-se a cada terna ordenada $(x, y, z) \in A$, um único número real denotado por $w = f(x, y, z)$. O conjunto A é denominado domínio da função e será denotado por $D(f)$. As variáveis x y e z são as variáveis independentes e a variável w é a variável dependente. O conjunto imagem da função f é o conjunto definido e denotado por*

$$Im(f) = \{w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}; (x, y, z) \in A\}.$$

Exemplo 2.8. *O domínio da função $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$ é o conjunto*

$$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Geomentricamente, o domínio de f corresponde aos pontos interiores à esfera de raio 2 com seu bordo.

Definição 2.6 (Função de n Variáveis)**.** *Uma função de n variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, em que A é um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, associa-se a cada lista de números reais $(x_1, ..., x_n) \in A$, um único número real denotado por $\xi = f(x_1, ..., x_n)$. O conjunto A é denominado domínio da função e será denotado por $D(f)$. As variáveis $x_1, ..., x_n$ são as variáveis independentes e a variável ξ é a variável dependente. O conjunto imagem da função f é o conjunto definido e denotado por*

$$Im(f) = \{\xi = f(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}; (x_1, ..., x_n) \in A\}.$$

Observa-se facilmente que o conjunto imagem de uma função de n variáveis reais a valores reais é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

2.3 Gráfico

Definição 2.7 (Gráfico)**.** *Ao considerar $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais, o gráfico de f, é denotado e definido por*

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in A\}.$$

Pode-se dizer que o gráfico de uma função é, num certo sentido, sua fotografia. Em outras palavras, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, y, f(x, y))$ quando (x, y) percorre o domínio de f. Esboçar o gráfico de uma função com duas variáveis reais a valores reais não é uma tarefa fácil. Por essa razão, utiliza-se *softwares* que constroem gráficos de funções em três dimensões.

Observação 2.1. *O gráfico de uma função de duas variáveis, em geral, é uma superfície. Entretanto, há casos em que isso não ocorre. Por exemplo, o gráfico da função*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & se \;\; x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se \;\; x, y \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

não é um superfície.

Exemplo 2.9. *Nas Figuras 2.1 e 2.2 é apresentado, respectivamente, o gráfico das funções reais $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ e $g(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.*

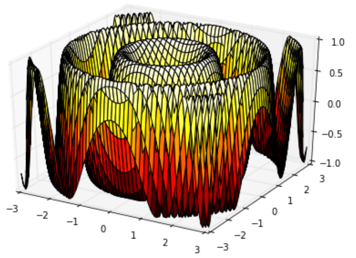

Figura 2.1: Gráfico da função $f(x, y)$.

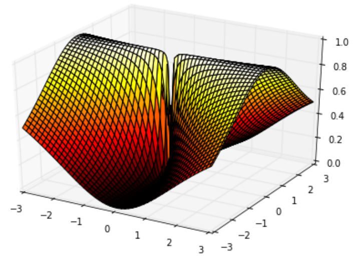

Figura 2.2: Gráfico da função $g(x, y)$.

Exemplo 2.10. *Nas Figuras 2.3 e 2.4 é ilustrado, respectivamente, o gráfico das funções reais* $h(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$ *e* $i(x, y) = y^2 - x^2$.

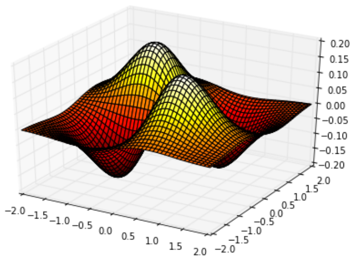

Figura 2.3: Gráfico da função $h(x, y)$.

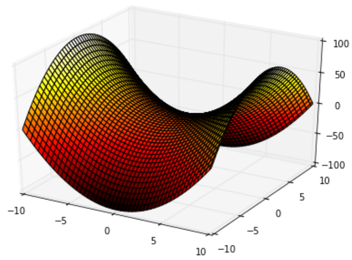

Figura 2.4: Gráfico da função $i(x, y)$.

Para funções de três ou mais variáveis, não é possível representar geometricamente o seu gráfico. Generalizando a Definição 2.7, se $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de n variáveis reais a valores reais, o gráfico de f, é denotado e definido por

$$G(f) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}; \xi = f(x), x \in A\}.$$

Observa-se, facilmente, que o gráfico de uma função de n variáveis reais a valores reais é um subconjunto do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.4 Conjuntos de Nível

Um terreno pode ser imaginado como uma superfície, por exemplo, uma região de uma montanha. Existem curvas que ligam pontos do terreno com a mesma altitude. Essas curvas são muito utilizadas em topografia e recebem o nome de curvas de nível. As curvas de nível são representadas na planta, abrangendo uma área, o que nos permite uma visão imaginária geral da sinuosidade do terreno. Nesta seção, discute-se a respeito dessas curvas.

Definição 2.8 (Curvas de Nível)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais. Chama-se curva de nível da função f a imagem inversa por f de elementos do contradomínio. Em outras palavras, denotando a curva de nível de f por N_c, tem-se*

$$N_c = \{(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}.$$

Definição 2.9 (Curvas de Nível: Isotermas, Isóbaras e Equipotenciais)**.** *Considere uma chapa metálica que ocupa, por exemplo, um retângulo $C = [0, 1]\times[0, 2]$ do plano. A cada ponto $(x, y) \in C$, associa-se a sua temperatura, denotada por $T(x, y)$ em graus Celsius. Neste caso, os conjuntos de nível são chamados de isotermas. Isto é, se dois pontos estão na mesma linha isotérmica, então eles têm a mesma temperatura. Se $P(x, y)$ for a pressão de um gás de volume x e temperatura y, então suas curvas de nível são chamadas de isóbaras. Por outro lado, se $P(x, y)$ for o potencial elétrico ou gravitacional em uma região A do plano xy, então suas curvas de nível são chamadas de equipotenciais.*

Exemplo 2.11. *Dada a função $f(x, y) = x^2 + y^2$, suas curvas de nível são elementos do conjunto*

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = c\}.$$

Assim, as curvas de nível ($c > 0$) são circunferênciais concêntricas de centro na origem. Sobre cada curva de nível $x^2 + y^2 = c$, a função f assume sempre o mesmo valor c. A curva de nível correspondente a $c = 0$ é o ponto $(0, 0)$. Nas Figuras 2.5 e 2.6, são ilustrados o gráfico e as curvas de nível da função f, respectivamente.

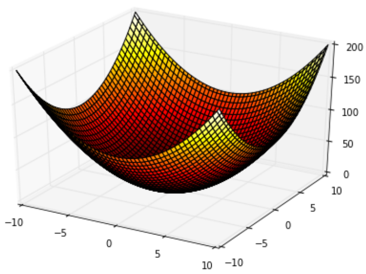

Figura 2.5: Gráfico da função $f(x, y)$.

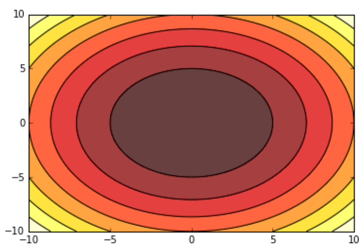

Figura 2.6: Curvas de nível de $f(x, y)$.

Exemplo 2.12. *Dada a função $f(x, y) = x + y$ suas curvas de nível são elementos do conjunto*

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = c\}.$$

Nas Figuras 2.7 e 2.8, são ilustrados o gráfico e as curvas de nível da função f, respectivamente. Note (Figura 2.8) que as curvas de nível são retas paralelas a reta $y = -x$. Além disso, sobre cada curva de nível $x + y = c$ a função f assume sempre o mesmo valor c.

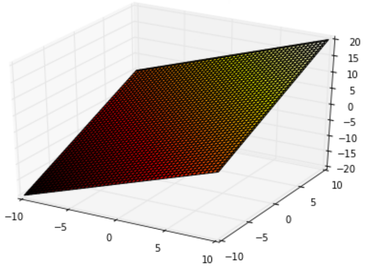

Figura 2.7: Gráfico da função $f(x, y)$.

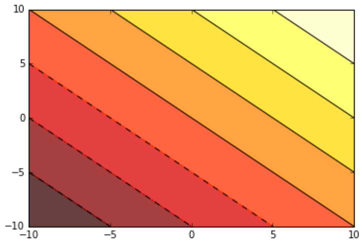

Figura 2.8: Curvas de nível de $f(x, y)$.

Exemplo 2.13. *Dada a função $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$ suas curvas de nível são elementos do conjunto*

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -xye^{-x^2-y^2} = c\}.$$

Nas Figuras 2.9 e 2.10, são ilustrados o gráfico e as curvas de nível da função f, respectivamente.

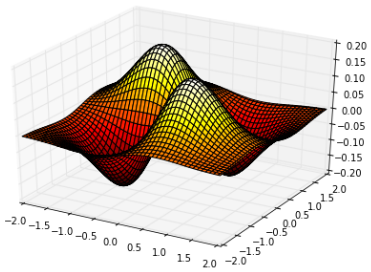

Figura 2.9: Gráfico da função $f(x, y)$.

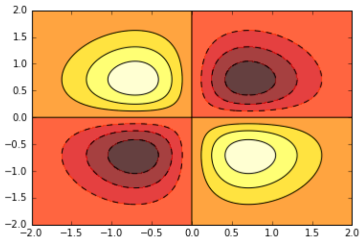

Figura 2.10: Curvas de nível de $f(x, y)$.

Observação 2.2. *Na maioria dos casos, é indispensável o uso de algum software para obtenção das curvas de nível de uma função.*

Definição 2.10 (Superfície de Nível)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de três variáveis reais a valores reais. Denomina-se superfície de nível da função f a imagem inversa por f de elementos do contradomínio. Em outras palavras, denotando a superfície de nível de f por N_c, tem-se*

$$N_c = \{(x, y, z) \in A \subset \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = c\}.$$

Exemplo 2.14. *As superfícies de nível da função $f(x, y, z) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} - z$ são os elementos do conjunto*

$$N_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{1 + x^2 + y^2} - z = c\}.$$

Assim, a superfície de nível de f, para $c = 0$ é o gráfico da função $z = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$, o qual é ilustrado na Figura 2.11.

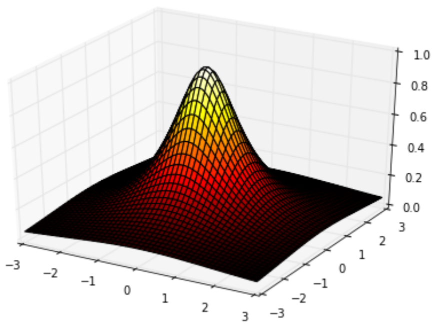

Figura 2.11: Superfície de nível da função $f(x, y, z)$.

Exemplo 2.15. *As superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2+y^3+z$ são os elementos do conjunto*

$$N_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^3 + z = c\}$$

Assim, a superfície de nível de f, para $c = 0$, é o gráfico da função $z = -x^2 - y^3$, como mostrado na Figura 2.12.

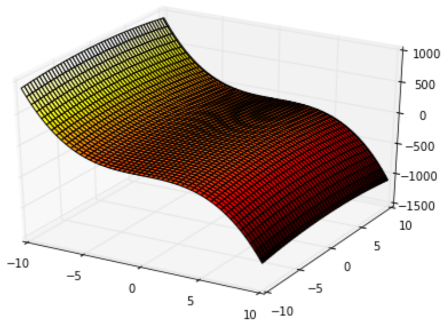

Figura 2.12: Superfície de nível da função $f(x, y, z)$.

Definição 2.11 (Conjunto de Nível)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis reais a valores reais. Denomina-se conjunto de nível da função f a imagem inversa por f de elementos do contradomínio. Em outras palavras, denotando o conjunto de nível de f por N_c, tem-se*

$$N_c = \{x \in A \subset \mathbb{R}^n; f(x) = c\}.$$

Observa-se que as curvas de nível e superfícies de nível são casos particulares dos conjuntos de nível.

2.5 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 2.1. *Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$. Calcule:*

a) $f(1, 1)$.

b) $f(e, 1)$.

Exercício 2.2. *Considere a função $f(x, y) = \sqrt{x - y}$.*

a) Calcule $f(4, 1)$.

b) Determine os elementos do domínio de f, cuja imagem seja igual a 1.

Exercício 2.3. *Em 1928, Charlles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelava o desempenho da economia norte americana durante o período de 1899 a 1922. Eles adotaram uma interpretação simplificada na qual a produção era determinada pela quantidade de capital investido e mão de obra empregada. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou bastante preciso. A função exponencial encontrada para modelar a produção era*

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha},$$

em que P representa a produção total, L a quantidade de trabalho e K a quantidade de capital investido. Supondo $b = 1,01$ e $\alpha = 0,75$, obtenha $P(147, 208)$ e interprete o resultado.

Exercício 2.4. *Seja $f(x, y) = 2x - 3y$. Calcule:*

a) $\dfrac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$.

b) $\dfrac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$.

Exercício 2.5. *Uma loja de tintas tem duas marcas de tintas de látex. As vendas indicam que, se a primeira marca for vendida a x_1 reais por galão e a segunda a x_2 reais por galão, a demanda pela primeira marca será de*

$$d_1(x_1, x_2) = 200 - 10x_1 + 20x_2$$

galões por mês, e pela segunda de

$$d_2(x_1, x_2) = 100 - 5x_1 + 10x_2$$

galões por mês. Expresse a receita mensal da loja proveniente das vendas de tinta em função dos preços x_1 *e* x_2.

Exercício 2.6. *Verifique se a função* $f(x,y) = 5x^3y + x^4 + 3$ *é homogênea. Em caso afirmativo, determine o grau de homogeneidade.*

Exercício 2.7. *Represente algebricamente e geometricamente o domínio da função dada por:*

$a) f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ $\qquad b) f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$c) f(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 + z - 4)}$ $\qquad d) f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

$e) f(x,y) = \sqrt{xy}$ $\qquad f) f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$

$g) f(x,y) = \ln(x + y - 1)$ $\qquad h) f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

Exercício 2.8. *Descreva as curvas de nível da função*

$a) f(x,y) = x,$ $\qquad b) f(x,y) = x + y,$

$c) f(x,y) = xy$ $\qquad d) f(x,y) = \ln(x^2 + y^2),$

$e) f(x,y) = 4x^2 + y^2,$ $\qquad f) f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$

$g) f(x,y) = 1 + x^2 + y^2,$ $\qquad h) f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

Exercício 2.9. *Suponha que* $T(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ *represente uma distribuição de temperatura no plano* xy*, em que* $T(x,y)$ *denota a temperatura em graus Celsius no ponto* (x,y)*. Represente geometricamente a isoterma (pontos com a mesma temperatura) correspondente à temperatura de* 36^oC*.*

Exercício 2.10. *Uma aplicação das curvas de nível na Economia envolve as chamadas curvas de indiferença. A um consumidor, que está interessado em comprar várias unidades de dois produtos, é associada uma função de utilidade* $U(x,y)$ *que mede a satisfação ou utilidade que o consumidor extrai ao adquirir* x *unidades do primeiro produto e* y *unidades do segundo. Uma curva de nível da função utilidade é chamada de curva de indiferença. Suponha que a utilidade para um consumidor da aquisição de* x *unidades de um produto e* y *unidades de um segundo produto é dado pela função*

$$U(x,y) = x^{\frac{3}{2}}y.$$

Supondo que o consumidor possui $x = 16$ *unidades do primeiro produto e* $y = 20$ *do segundo, plote a curva de indiferença.*

Exercício 2.11. *Descreva as superfícies de nível das funções abaixo definidas.*

$a) f(x, y, z) = x + y + z,$ $\quad$ $b) f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2,$

$c) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$ $\quad$ $d) f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2},$

$e) f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2),$ $\quad$ $f) f(x, y, z)\sqrt{1 - z},$

$g) f(x, y, z) = x,$ $\quad$ $h) f(x, y, z) = y.$

Capítulo 3

Noções de Topologia

A Topologia é um ramo da Matemática que surgiu no século XX, em que se estuda de uma forma muito geral, as noções de limite, continuidade, proximidade e as ideias relacionadas. A noção de proximidade ou de vizinhança é noção fundamental na aplicação da noção de limite. Discutir a proximidade de dois números na reta real é bem diferente de se discutir a proximidade de dois pontos no plano. A passagem do Cálculo de funções de uma variável para o Cálculo de funções de várias variáveis requer uma mudança na topologia do domínio das funções. Para um entendimento mais profundo da noção de limite, apresenta-se aqui noções básicas de topologia dos espaços euclidianos.

3.1 Bolas e Vizinhanças

O conceito de bolas generaliza a noção de intervalo aberto e fechado que se conhece em $\mathbb{R}$.

Definição 3.1 (Bola aberta em $\mathbb{R}^2$)**.** *Dado um ponto $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e um número real r positivo, a bola aberta de centro no ponto a e raio r, denotada por $B(a, r)$ é o conjunto*

$$B(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; d((x, y), (a_1, a_2)) < r\}.$$

Como $d((x, y), (a_1, a_2)) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$, segue que

$$B((a_1, a_2), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}.$$

Geometricamente, uma bola aberta de centro no ponto (a_1, a_2) e raio r corresponde aos pontos interiores de uma circunferência centrada no ponto (a_1, a_2) e com raio r. O uso da norma euclidiana faz com que as bolas, aqui estudadas, tenham de fato, o formato redondo. Ao utilizar a norma do máximo, a geometria da bola será um quadrado. Por outro lado, ao se utilizar a norma da soma, tem-se que a geometria da bola será um losango.

Exemplo 3.1. *O conjunto* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + y^2 < 17\}$ *representa uma bola aberta de centro no ponto* $(1,0)$ *e raio* $r = \sqrt{17}$.

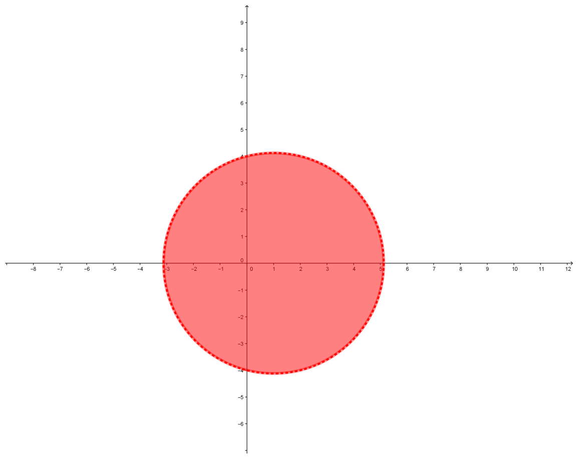

Figura 3.1: Bola aberta de centro no ponto $(1,0)$ e raio $r = \sqrt{17}$.

O conceito de bola aberta pode ser estendido para $\mathbb{R}^n$, como descrito na definição abaixo:

Definição 3.2 (Bola aberta em $\mathbb{R}^n$)**.** *Dado um ponto* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ *e um número real* r *positivo, a bola aberta de centro no ponto* a *e raio* r*, denotada por* $B(a,r)$ *é o conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) < r\}.$$

Como $d((x_1, ..., x_n), (a_1, ..., a_n)) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2}$*, segue que*

$$B((a_1, ..., a_n), r) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 < r^2\}.$$

Assim, uma bola aberta de centro no ponto a *e raio* r *é o conjunto de todos os pontos cuja distância ao ponto* a *é estritamente menor do que* r.

Analogamente, pode-se definir bola fechada:

Definição 3.3 (Bola fechada em $\mathbb{R}^2$)**.** *Dado um ponto* $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *e um número real* r *positivo, a bola fechada de centro no ponto* a *e raio* r*, denotada por* $B\,[a,r]$ *é o conjunto*

$$B(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; d((x,y),(a_1,a_2)) \leq r\}.$$

Como $d((x,y),(a_1,a_2)) = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}$, *segue que*

$$B\left[(a_1,a_2),r\right] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq r^2\}.$$

Geometricamente, uma bola fechada de centro no ponto (a_1,a_2) e raio r corresponde a um círculo de centro no ponto (a_1,a_2) e com raio r. Neste texto, a palavra círculo ou disco pode ser pensado, intuitivamente, como sendo a união de uma circunferência com seu interior. Na sequência, no Exemplo 3.2, é ilustrado o conceito de bola fechada.

Exemplo 3.2. *O conjunto* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9\}$ *representa uma bola fechada de centro no ponto* $(1,-2)$ *e raio* $r = 3$*, como ilustrada na Figura 3.2.*

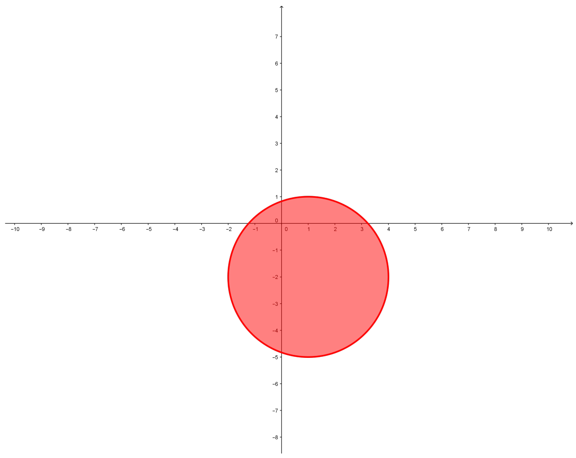

Figura 3.2: Bola aberta de centro no ponto $(1,-2)$ e raio $r = 3$.

Definição 3.4 (Bola fechada em $\mathbb{R}^2$)**.** *Dado um ponto* $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ *e um número real* r *positivo, a bola fechada de centro no ponto* a *e raio* r *é o conjunto*

$$B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) \leq r\}.$$

Como $d(x,a) = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + ... + (x_n-a_n)^2}$, *segue que*

$$B\left[a,r\right] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n; (x_1-a_1)^2 + ... + (x_n-a_n)^2 \leq r^2\}.$$

Definição 3.5 (Circunferência)**.** *Dado um ponto* $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ *e um número real* r *positivo, a circunferência de centro no ponto* a *e raio* r*, denotada por* $S((a_1,a_2),r)$*, é o conjunto*

$$S((a_1,a_2),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; d((x,y),(a_1,a_2)) = r\}.$$

Como $d((x,y),(a_1,a_2)) = \sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}$*, segue que*

$$S((a_1,a_2),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-a_1)^2+(y-a_2)^2 = r^2\}.$$

Exemplo 3.3. *O conjunto* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-3)^2+(y-1)^2 = 9\}$ *representa uma circunferência de centro no ponto* $a = (3,1)$ *e raio* 3*, como ilustrado na Figura 3.3.*

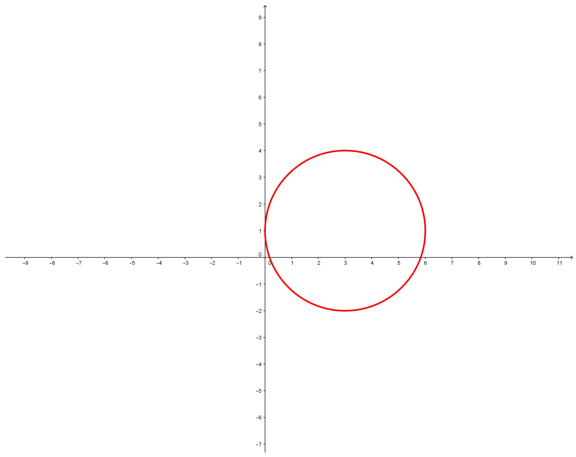

Figura 3.3: Circunferência centro no ponto $(3,1)$ e raio $r = 3$.

Definição 3.6 (Esfera)**.** *Uma esfera de centro no ponto* a *e raio* r *é o conjunto*

$$S[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) = r\}.$$

Um caso particular da esfera e de muito interesse em aplicações é a esfera unitária n *dimensional, que corresponde ao conjunto*

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) = 1\}.$$

Quando $n = 2$*,* S^1 *é a circunferência de centro na origem e raio igual a 1.*

Observação 3.1. *Em* $\mathbb{R}$*, as bolas abertas equivalem a intervalos abertos, e as bolas fechadas equivalem a intervalos fechados.*

Definição 3.7 (vizinhança)**.** *Uma vizinhança do ponto* $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ *é qualquer subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *que contenha uma bola aberta de centro no ponto* a*, isto é,* V *é uma vizinhança de* a *se* $B((a_1,a_2),r) \subseteq V$*, para algum* $r > 0$*. Note que qualquer bola aberta é vizinhança de seu próprio centro.*

Exemplo 3.4. *O conjunto* $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 12\}$ *representa uma vizinhança da origem, pois* V *contém, por exemplo, a bola* $B((0,0),1)$*. Na Figura 3.4, é ilustrada a* *vizinhança V.*

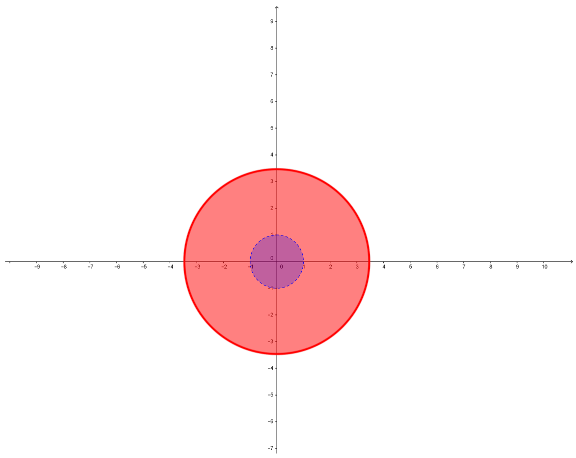

Figura 3.4: Uma vizinhança da origem.

3.2 Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados

Definição 3.8 (Ponto interior)**.** *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Um ponto $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ diz-se interior de S se existe uma bola aberta centrada em $a = (a_1, a_2)$ e inteiramente contida em S.*

Por exemplo, O ponto $(0, 4)$ é um ponto interior do conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\}$, pois, escolhendo $r = \frac{1}{2}$, tem-se que $B((0, 4), \frac{1}{2}) \subset S$, como pode ser observado na Figura 3.5, na qual são ilustrados a região S, a bola B e o ponto $(0, 4)$.

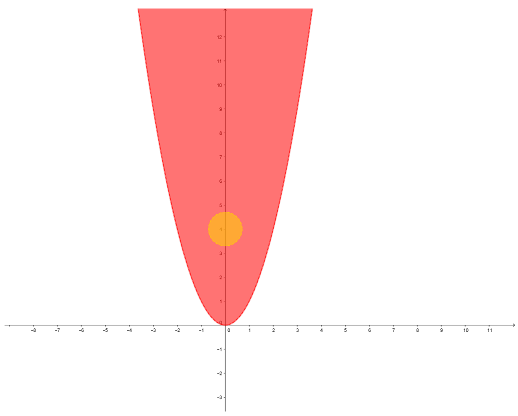

Figura 3.5: Ilustração da região S, da bola B e do ponto $(0, 4)$.

Definição 3.9 (Interior de um conjunto)**.** *O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto S, é chamado de interior de S e é denotado por $int\ S$.*

Exemplo 3.5. *Dado $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x^3\}$, tem-se que $int\ S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < x^3\}$, como ilustrado nas Figuras 3.6 e 3.7.*

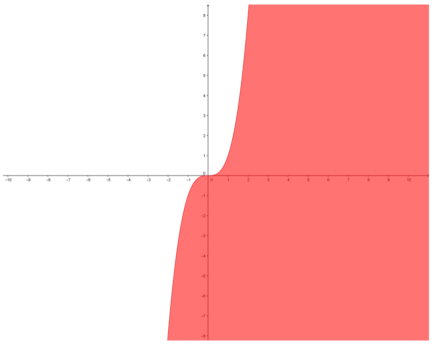

Figura 3.6: Conjunto S.

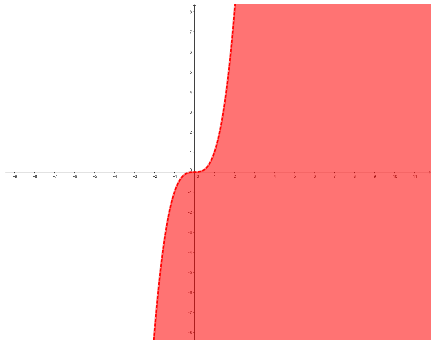

Figura 3.7: Interior de S.

Definição 3.10 (Exterior de um conjunto)**.** *Um ponto se diz exterior a S se for interior ao seu complemento. O conjunto dos pontos exteriores a S é chamado de exterior de S, e, é denotado por $ext\ S$.*

Definição 3.11 (Fronteira de um conjunto)**.** *Um ponto de fronteira de S é um ponto que não é ponto interior e nem exterior a S. O conjunto dos pontos fronteiras de S é denotado por ∂S e também é conhecido por fronteira de S. Esses conceitos podem ser estendidos para $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 3.6. *O ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é ponto interior do conjunto $S = B(a, r)$. Com efeito, tem-se que*

$$B(a, r) \subseteq S = B(a, r),$$

o que mostra que existe uma bola aberta de centro no ponto a e raio r e contida em S. O conjunto dos pontos interiores de S é

$$int\ S = B(a, r)$$

uma vez que a bola é vizinhança de todos os seus pontos. O conjunto dos pontos exteriores de S é o conjunto

$$ext\ S = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, a) > r\},$$

uma vez que estes pontos são interiores ao complemento de $B(a, r)$. O conjunto

$$\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, a) = r\}$$

constitui o conjunto dos pontos fronteiros de S, pois esses pontos não são pontos interiores a S e nem de seu complemento.

Exemplo 3.7 (Um exemplo em Economia)**.** *Um conjunto muito utilizado em economia é o conjunto*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{p} p_i x_i \leq r, \ \ x_i > 0\}.$$

Tal conjunto representa a restrição orçamentária de um consumidor, em que x é um vetor de $\mathbb{R}^n$ com coordenadas positivas que representa uma cesta de n bens da economia, p_i é o preço do i-ésimo bem e r é a renda do consumidor. O conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+; \sum_{i=1}^{p} p_i x_i < r, \ \ x_i > 0\}$$

representa o interior do conjunto A.

É importante mencionar que certos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ só possuem pontos interiores. Nesse, pode-se definir conjunto aberto.

Definição 3.12 (Conjunto aberto)**.** *Se todos os pontos de um conjunto forem pontos interiores, o conjunto diz-se aberto. Assim, um conjunto S é um conjunto aberto se, e somente se, S coincide com seu interior. Em outras palavras, um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se para todo ponto $a = (a_1, a_2) \in A$, existe uma bola aberta de centro em $a = (a_1, a_2)$ e raio r, tal que $B((a_1, a_2), r) \subset A$.*

Os conjuntos abertos são particularmente importantes em topologia, porue muitas das definições e resultados são expressos em termos desses conjuntos. Existe ainda o conceito de aberto relativo:

Definição 3.13 (Conjunto aberto relativo)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$. Diz-se que um subconjunto $A \subset X$ é aberto em X quando cada ponto $a = (a_1, a_2) \in A$ é o centro de uma bola aberta $B((a_1, a_2), r)$, tal que $B((a_1, a_2), r) \cup X \subset A$. Isso significa que os pontos de X que estão suficientemente próximos de cada $a \in A$ pertencem a A.*

Exemplo 3.8. *O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ é um conjunto aberto, pois só têm pontos interiores como pode ser observado na Figura 3.8*

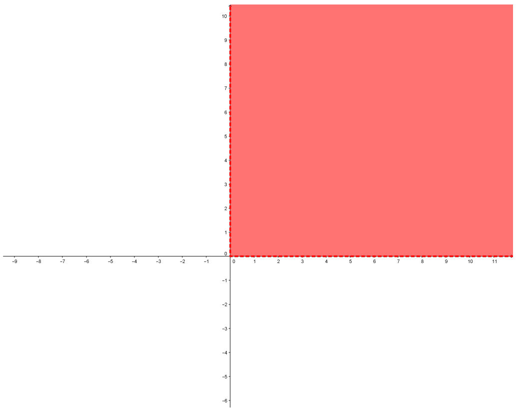

Figura 3.8: Conjunto A.

Exemplo 3.9. *O conjunto* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 2\}$ *não é aberto, uma vez que existe pelo menos um ponto, por exemplo o ponto* $(0, 1)$*, que não é ponto interior de* B*, como ilustrado a Figura 3.9.*

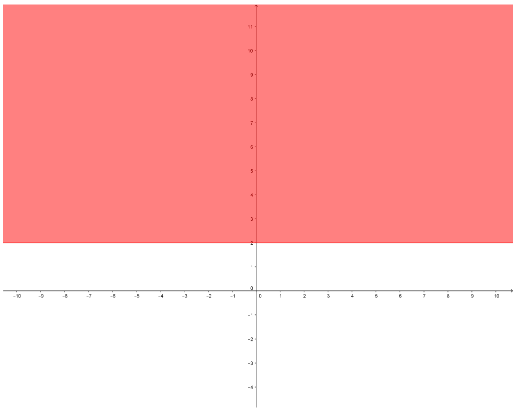

Figura 3.9: Conjunto B.

Exemplo 3.10. *Toda bola aberta é um conjunto aberto.*

Definição 3.14 (Conjunto fechado)**.** *Um conjunto* $F \subset \mathbb{R}^2$ *diz-se fechado se o seu complemento for um conjunto aberto. O complemento de um conjunto* F *em relação ao* $\mathbb{R}^2$ *é o conjunto* $F - \mathbb{R}^2$*, ou seja, o conjunto de todos os pontos de* $\mathbb{R}^2$ *que não são pontos de* F*.*

Exemplo 3.11. *O conjunto* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 3x\}$ *é um conjunto fechado, pois o seu complemento é um conjunto aberto. O conjunto* F *e seu complemento são ilustrados nas Figuras 3.10 e 3.11.*

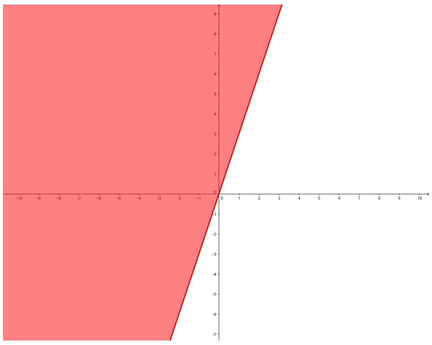

Figura 3.10: Conjunto F.

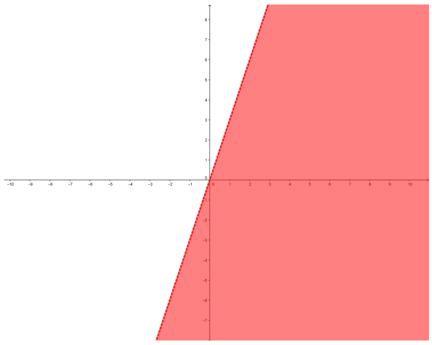

Figura 3.11: Complemento de F.

Exemplo 3.12. *O conjunto* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1\}$ *é um conjunto fechado, pois o seu complemento é um conjunto aberto, como ilustrados nas Figuras 3.12 e 3.13.*

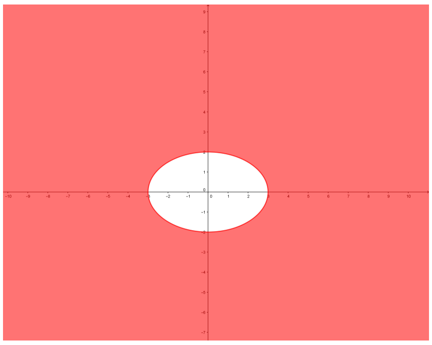

Figura 3.12: Conjunto F

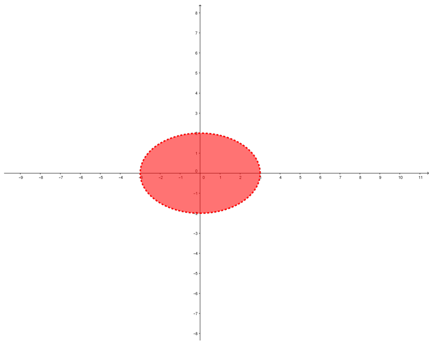

Figura 3.13: Complemento de F

Exemplo 3.13. *O conjunto* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \geq 0\}$ *não é fechado e nem aberto, já que nem* F*, nem o seu complemento são abertos.*

Um conjunto pode ser aberto, fechado, nem aberto nem fechado e simultaneamente aberto e fechado (pense em um exemplo de um conjunto que seja aberto e fechado simultaneamente!).

Definição 3.15 (Aderência ou fecho)**.** *A aderência ou o fecho de um conjunto* $A \subset \mathbb{R}^2$*, denotado por* $\overline{A}$*, é a união de* A *com sua fronteira. Um ponto diz-se aderente a* A *se pertencer a aderência de* A*.*

Os conceitos de conjunto aberto, conjunto fechado e aderência também podem ser estendidos para $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.14. *A aderência do conjunto* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ *é dada por* $\overline{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

3.3 Pontos de Acumulação

Definição 3.16 (Pontos de acumulação e conjunto derivado)**.** *Um ponto $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de acumulação do conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ se, para todo $r > 0$,*

$$\{B((a_1, a_2), r)\backslash\{a\}\} \cap A \neq \emptyset.$$

Em outras palavras, em toda vizinhança de $a = (a_1, a_2)$ existe uma infinidade de pontos do conjunto A. O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é chamado de conjunto derivado de A e denotado por A'.

Definição 3.17 (Ponto isolado e conjunto discreto)**.** *Um elemento de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, que não seja ponto de acumulação desse conjunto, diz-se um ponto isolado. Um conjunto formado apenas por pontos isolados é denominado conjunto discreto.*

Exemplo 3.15. *Seja $A = [2, 4[\cup \{5\}$, um subconjunto de $\mathbb{R}$. Qualquer elemento do intervalo $[2, 4]$ é um ponto de acumulação do conjunto A. Logo, $A' = [2, 4]$. O elemento 4 não pertence ao conjunto A, mas, mesmo assim, é um ponto de acumulação de A; pois, todo intervalo aberto centrado em 4 contém pelo menos um ponto do conjunto A. Portanto, um ponto de acumulação pode ou não pertencer ao conjunto.*

Exemplo 3.16. *Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y\}$. Neste caso, $A' = A$.*

Exemplo 3.17. *O conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ não possui nenhum ponto de acumulação.*

A definição de ponto de acumulação (Definição 3.16) pode ser estendida para dimensões superiores a dois:

Definição 3.18 (Pontos de acumulação em $\mathbb{R}^n$)**.** *Seja $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ e r um número real positivo. O ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se para todo $r > 0$,*

$$\{B(a, r)\backslash\{a\}\} \cap A \neq \emptyset.$$

Exemplo 3.18. *Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$. O conjunto dos pontos de acumulação do conjunto A é uma bola fechada de centro no ponto $(0, 0, 0)$ e raio 2.*

Exemplo 3.19. *Todos os pontos de uma bola aberta de centro na origem de $\mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ são pontos de acumulação.*

Exemplo 3.20. *O conjunto $\mathbb{Z}^n$, subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com coordenadas inteiras, é um conjunto discreto.*

3.4 Conjuntos Compactos

Em Topologia, compacidade é uma propriedade que generaliza a noção de intervalo fechado e limitado de números reais. O termo compacto foi introduzido por Maurice Frechet $(1878-1973)$ em sua tese de doutoramento defendida em 1906 na renomada *École Normale Supérieure* no qual ele unificou diversas ideias que deram origem a teoria dos espaços métricos.

Definição 3.19 (Conjunto limitado). *Um conjunto $L \subset \mathbb{R}^2$ é limitado, se existir alguma bola aberta que o contenha.*

Exemplo 3.21. *O conjunto $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$ é limitado. De fato, considerando (por exemplo) a bola $B((0,0),4)$, tem-se que $L \subset B((0,0),4)$, como pode ser observado na Figura 3.14.*

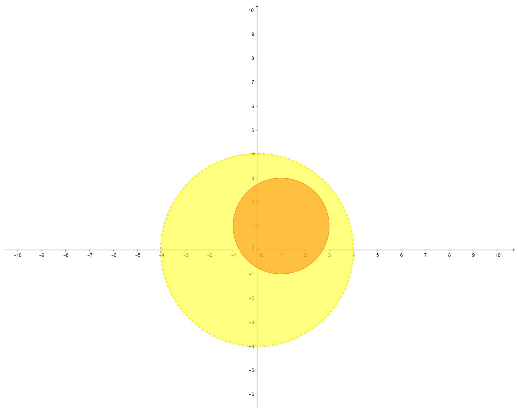

Figura 3.14: Ilustração do conjunto $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$ e da bola $B((0,0),4)$.

No próximo exemplo, será ilustrado o caso de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que não é limitado.

Exemplo 3.22. *O conjunto $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \sin x \leq y \leq \cos x\}$ não é limitado, pois não existe uma bola aberta que contenha L, como observado na Figura 3.15.*

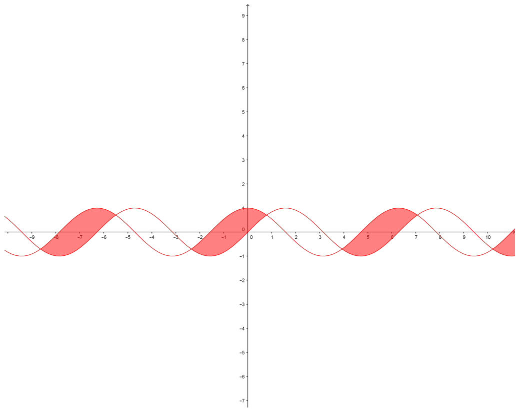

Figura 3.15: Ilustração do conjunto $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sin x \leq y \leq \cos x\}$ e da bola $B((0, 0), 4)$.

Definição 3.20 (Conjunto compacto)**.** *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ é denominado compacto quando for fechado e limitado.*

Os conceitos de limitação e compacidade podem ser facilmente estendidos para $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.23. *O conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$ é compacto, pois C é fechado e limitado. Na Figura 3.16, é ilustrado o conjunto C.*

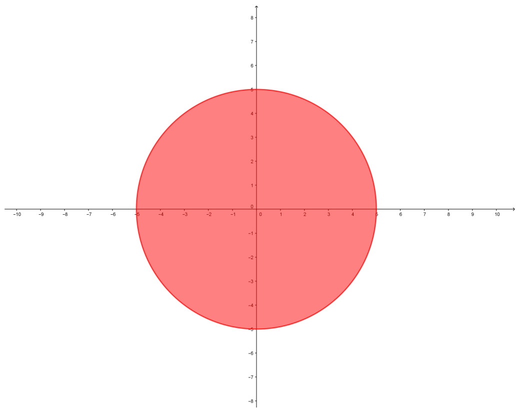

Figura 3.16: Ilustração do conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$.

O próximo exemplo ilustra um caso de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que não é compacto.

Exemplo 3.24. *O conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}$ não é compacto, pois C não é limitado. Note que o conjunto C é fechado, pois seu complemento é aberto. Na Figura 3.17, é ilustrado o conjunto C.*

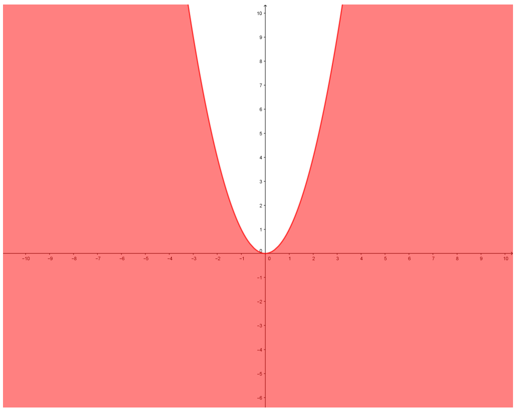

Figura 3.17: Ilustração do conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}$.

3.5 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 3.1. *Escreva a definição de bola aberta em* $\mathbb{R}^2$ *utilizando a norma da soma.*

Exercício 3.2. *Existe algum conjunto que seja aberto e fechado?*

Exercício 3.3. *Em cada caso, represente geometricamente o conjunto* A*. Classifique* A *em aberto, fechado, limitado ou compacto.*

$a)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y < 1\}$

$b)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

$c)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1 \ \ e \ \ 1 < y < 3\}$

$d)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$

$e)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 3 \ \ e \ \ x^2 + y^2 < 16\}$

$f)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} > 1\}$

$g)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y - 2)^2 \geq 1\}$

$h)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \mid x \mid + \mid y \mid > 1\}$

Exercício 3.4. *Determine o conjunto dos pontos de acumulação de cada conjunto a seguir.*

$a)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

$b)$ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \ \ inteiros\}$

$c)$ $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1 \ \ e \ \ 1 < y < 2\}$

$d)$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 1\}$

$e)$ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 3\}$

$f)$ $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} > 1\}$

$g)$ $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y - 2)^2 \geq 1\}$

$h)$ $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \mid x \mid + \mid y \mid > 1\}$

Capítulo 4

Limite de Funções

O conceito de limite de uma função é fundamental em cálculo e está relacionado com o comportamento dessa função próxima a um valor particular de sua variável independente. Neste capítulo, estuda-se limite de funções de duas variáveis reais a valores reais.

4.1 A Definição de Limite

Recordando o curso de Cálculo I, a definição de limite é dada por:

Definição 4.1 (Limite de uma função de uma variável). *Seja f uma função de uma variável real a valores reais, definida em um intervalo aberto em torno de a_0, exceto talvez no ponto a_0. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de um número real L (tão próximo quanto quisermos), para todos os valores de x, suficientemente próximos de a_0, diz-se que f tem limite L quando x tende a a_0, e, escreve-se*

$$\lim_{x \to a_0} f(x) = L,$$

que se lê o limite de $f(x)$ quando x tende a a_0 é L.

Segundo Thomas, essencialmente, a Definição 4.1 diz que os valores de $f(x)$ ficarão próximos do número real L sempre que x estiver próximo de a_0. Essa definição é informal, pois as expressões arbitrariamente próximo e suficientemente próximo são imprecisas, seu significado depende do contexto. Para um metalúrgico que fabrica um pistão, próximo pode significar alguns centésimos de milímetro, enquanto que para um astrônomo que estuda galáxias distantes, próximo pode significar alguns milhares de anos-luz. Essa definição informal é perfeitamente estendida para funções de n variáveis reais a valores reais.

Com o intuito de substituir as expressões imprecisas que foram destacadas, adota-se a seguinte definição de limite, devida à Cauchy.

Definição 4.2 (Definição de limite de uma função de duas variáveis)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais, $a = (a_1, a_2)$ um ponto de acumulação de A e L um número real. Diz-se L é o limite de f quando (x, y) tende para (a_1, a_2) e, escreve-se*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $(x, y) \in A$ e

$$0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \Longrightarrow | f(x, y) - L |< \varepsilon.$$

O fato de se impor $0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\|$ faz com que possa existir o limite de f quando (x, y) tende a (a_1, a_2) sem que a função f esteja definida em (a_1, a_2). Em outras palavras, o valor de f no ponto (a_1, a_2) não interesse para o cálculo do limite. Note que a Definição 4.2 é feita para (a_1, a_2), sendo ponto de acumulação do domínio de f. De modo intuitivo, se (a_1, a_2) não é um ponto de acumulação de A, existe uma bola centrada em (a_1, a_2) que não contém pontos de A distintos de (a_1, a_2) e, portanto, não é possível fazer (x, y) tender a (a_1, a_2) por pontos distintos de (a_1, a_2).

A Definição 4.2 é facilmente estendida para uma função de n variáveis reais a valores reais.

Definição 4.3 (Definição de limite de uma função de n variáveis)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis reais a valores reais, $a = (a_1, ..., a_n)$ um ponto de acumulação de A e L um número real. Diz-se L é o limite de f quando x tende para a e escreve-se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \textit{ou} \quad \lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,...,a_n)} f(x_1, ..., x_n) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ e

$$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow | f(x) - L |< \varepsilon.$$

O matemático inglês G. H. Hardy, um apaixonado pelo criquete, o desporto nacional britânico, dizia que, para se entender bem a noção de limite, é preciso pensar numa competição entre um herói e um bandido. O herói tenta provar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ enquanto que o bandido tenta provar o contrário. O bandido escolhe epsilons a sua vontade enquanto que o herói tenta encontrar deltas de modo que para todo x, tal que

$0 < \|x - a\| < \delta$, consiga se ter $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$. O herói ganhará o jogo (e provará assim que $\lim_{x \to a} f(x) = L$), quando para qualquer $\varepsilon > 0$ escolhido pelo bandido, consiga encontrar sempre um $\delta > 0$ nas condições pretendidas. O bandido ganhará, pelo contrário, quando conseguir encontrar em $\varepsilon > 0$, para o qual o herói não consiga encontrar um $\delta > 0$ que satisfaça o pretendido.

Exemplo 4.1. *Se $f(x, y) = k$ é um função constante, então para todo $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, tem-se que*

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} k = k,$$

em que $k \in \mathbb{R}$. Observe que o domínio da função $f(x, y) = k$ é todo $\mathbb{R}^2$ e consequentemente o ponto (a_1, a_2) é um ponto de acumulação para o domínio de f. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, pretende-se mostrar que existe $\delta > 0$ com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verificando

$$0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \Longrightarrow \mid k - k \mid < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Então,

$$\mid k - k \mid = 0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ qualquer, verificando a Eq. 4.1 e, portanto,

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} k = k.$$

Exemplo 4.2. *Se $f(x, y) = x$ é uma função real, então,*

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} x = a_1.$$

Observe que o domínio da função $f(x, y) = x$ é todo plano $\mathbb{R}^2$ e, com isso, qualquer ponto (a_1, a_2) é um ponto de acumulação de $\mathbb{R}^2$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, deve-se mostrar que existe $\delta > 0$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \Rightarrow \mid x - a_1 \mid < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Então,

$$\mid x - a_1 \mid \leq \|(x, y) - (a_1, a_2\| < \delta.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon$ verificando a Eq. 4.2 e, portanto,

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} x = a_1.$$

A função $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $p_i(x) = x_i$, em que $i = 1, ..., n$, é chamada de *função projeção*. Observe que no Exemplo 4.2, é ilustrado um caso particular da função projeção.

Exemplo 4.3. *Se $p_i(x) = x_i$ é a função projeção, então*

$$\lim_{x \to a} p_i(x) = a_i,$$

em que $i = 1, ..., n$. Observe que o domínio da função projeção é todo $\mathbb{R}^n$ e com isso qualquer ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, deve-se mostrar que existe $\delta > 0$, com $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow | x_i - a_i | < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Então,

$$| x_i - a_i | = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} = \|x - a\| < \delta.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon$ verificando a Eq. 4.3 e, portanto,

$$\lim_{x \to a} p_i(x) = a_i,$$

em que $i = 1, ..., n$.

Exemplo 4.4. *Se $f(x, y) = mx + ny$, em que m e n são números reais não nulos, então,*

$$\lim_{(x,y) \to (a_1,a_2)} (mx + ny) = ma_1 + na_2.$$

Observe que o domínio da função $f(x, y) = mx + ny$ é o todo plano $\mathbb{R}^2$ e com isso o ponto (a_1, a_2) é um ponto de acumulação para o domínio. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, deve-se mostrar que existe $\delta > 0$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \Longrightarrow |(mx + ny) - (ma_1 + na_2)| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mid (mx+ny)-(ma_1+na_2)\mid &= \mid m(x-a_1)+n(y-a_2)\mid \\
&\leq \mid m\mid\mid x-a_1\mid + \mid n\mid\mid y-a_2\mid \\
&\leq \mid m\mid \|(x,y)-(a_1,a_2)\| + \mid n\mid \|(x,y)-(a_1,a_2)\| \\
&< \mid m\mid \delta + \mid n\mid \delta \\
&= \delta(\mid m\mid + \mid n\mid).
\end{aligned}$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, *existe*

$$\delta = \frac{\varepsilon}{(\mid m\mid + \mid n\mid)},$$

verificando a Eq. 4.4 e, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} (mx+ny) = ma_1 + na_2.$$

Exemplo 4.5. *Se*

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2},$$

então,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Observe que o domínio da função $f(x,y)$ *é o conjunto* $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. *Assim, o ponto* $(0,0)$ *é um ponto de acumulação para o domínio. Dado* $\varepsilon > 0$ *qualquer, deve-se mostrar que existe* $\delta > 0$, *com* $(x,y) \in A$ *tal que*

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Então,

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{2x^2\mid y\mid}{x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ *verificando a Eq. 4.5 e, portanto,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

Exemplo 4.6. *Se $f(x,y) = x(x^2+y^2)$, então,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x(x^2+y^2) = 0.$$

Observe que o domínio da função $f(x,y)$ é o $\mathbb{R}^2$ e, com isso, o ponto $(0,0)$ é um ponto de acumulação para o domínio. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, deve-se mostrar que existe $\delta > 0$, com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Longrightarrow \left|x(x^2+y^2)-0\right| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Então,

$$\left|x(x^2+y^2)\right| = \mid x \mid (x^2+y^2) \leq (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} < (\delta)^{\frac{1}{3}}.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon^3$ verificando a Eq. 4.6 e, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x(x^2+y^2) = 0.$$

Observação 4.1. *Nos exemplos anteriores, o que se faz é majorar a expressão $\mid f(x)-L \mid$ até se obter uma expressão em $\|x-a\|$. Em particular, quando a função f for uma função de duas variáveis reais a valores reais, são úteis as seguintes desigualdades:*

1. $\mid x \mid \leq \sqrt{x^2+y^2}$;
2. $\mid y \mid \leq \sqrt{x^2+y^2}$;
3. $x^2 \leq x^2+y^2$;
4. $\mid x-a \mid \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Os resultados, a seguir, são apresentados para funções de duas variáveis reais a valores reais. Todos podem ser facilmente estendidos para funções de n variáveis reais a valores reais.

Proposição 4.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais e (a_1,a_2) um ponto de acumulação de A. Se existe o limite de f quando (x,y) tende para (a_1,a_2), então ele é único.*

Demonstração. Suponha que existam números reais L_1 e L_2 com $L_1 \neq L_2$, tais que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L_1$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L_2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, então por definição de limite, segue:

$$\exists\, \delta_1 > 0,\ (x,y) \in A \text{ e } 0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x,y) - L_1| < \varepsilon, \tag{4.7}$$

$$\exists\, \delta_2 > 0,\ (x,y) \in A \text{ e } 0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x,y) - L_2| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Sendo (a_1, a_2) um ponto de acumulação do domínio de f, existe $(x_0, y_0) \in A$, tal que

$$0 < \|(x_0, y_0) - (a_1, a_2)\| < \delta.$$

Das Eqs. 4.7 e 4.8, concluí-se que

$$\mid f(x,y) - L_1 \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\mid f(x,y) - L_2 \mid < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então,

$$\mid L_1 - L_2 \mid = \mid L_1 - f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) - L_2) \mid \leq \mid f(x_0,y_0) - L_1 \mid + \mid f(x_0,y_0) - L_2 \mid < \varepsilon,$$

ou seja, $L_1 = L_2$.

4.2 O Teste dos Dois Caminhos

Nesta seção, apresenta-se um teste, conhecido por teste dos dois caminhos, cuja finalidade é mostrar a não existência de um limite.

Proposição 4.2. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais e (a_1, a_2) um ponto de acumulação de A. Suponha que*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L$$

e que exista uma curva γ em $\mathbb{R}^2$ contínua em t_0, com $\gamma(t_0) = a$ e, para $t \neq t_0$, $\gamma(t) \neq (a_1, a_2)$ com $\gamma(t) \in A$. Nessas condições,

$$\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Demonstração. De
$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L,$$
segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(x,y) \in A, 0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta_1 \Longrightarrow | f(x,y) - L |< \varepsilon. \tag{4.9}$$

Sendo γ contínua no ponto t_0, para todo $\delta_0 > 0$ acima, existe $\delta > 0$, tal que

$$| t - t_0 |< \delta \Longrightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \delta_1$$

e, portanto, tendo em vista que γ é injetora,

$$0 <| t - t_0 |< \delta \Longrightarrow 0 < \|\gamma(t) - a\| < \delta_1. \tag{4.10}$$

Das Eqs. 4.9 e 4.10, segue

$$0 <| t - t_0 |< \delta \Longrightarrow | f(\gamma(t)) - L |< \varepsilon,$$

ou seja,
$$\lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Observação 4.2. *Entende-se por caminho ou curva em $\mathbb{R}^2$ uma aplicação $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, em que I denota um intervalo da reta. A aplicação γ associa cada $t \in I$ um vetor $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.*

Dados dois caminhos γ_1 e γ_2 em $\mathbb{R}^2$, nas condições da Proposição 4.2, segue que se ocorrer
$$\lim_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2, \tag{4.11}$$
com $L_1 \neq L_2$, então,
$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$$
não existirá. Da mesma forma, tal limite não existirá se um dos limites dados na Eq. 4.11 não existir. Esse critério é conhecido como *teste dos dois caminhos*. Vale enfatizar que o teste dos dois caminhos garante apenas a não existência do limite.

Exemplo 4.7. *Considere o seguinte limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Sejam $\gamma_1(t) = (t, 0)$ *e* $\gamma_2(t) = (0, t)$ *dois caminhos que levam a origem. Seja*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Então,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^2}{t^2}\right) = 1$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \left(-\frac{t^2}{t^2}\right) = -1.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

não existe. Na Figura 4.1, é ilustrado o gráfico da função $f(x, y)$*.*

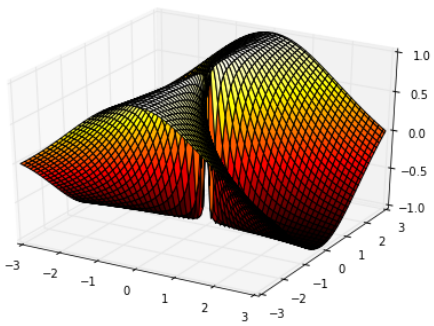

Figura 4.1: Gráfico da função $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.

Exemplo 4.8. *Considere o seguinte limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^4}\right).$$

Sejam $\gamma_1(t) = (t, t)$ *e* $\gamma_2(t) = (t^2, t)$ *dois caminhos que levam a origem. Seja*

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Então,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3}{2t^2}\right) = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}\right).$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)$$

não existe. Na Figura 4.2, é ilustrado o gráfico da função $f(x,y)$.

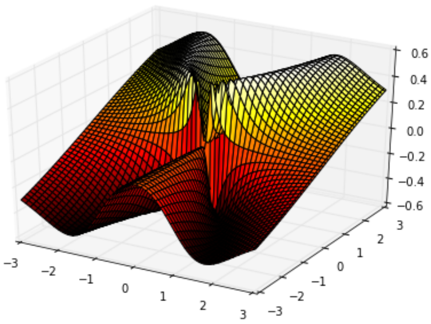

Figura 4.2: Gráfico da função $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^4)$.

Exemplo 4.9. *Considere o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right).$$

Sejam $\gamma_1(t) = (t,t)$ *e* $\gamma_2(t) = (t,5t)$, *dois caminhos que levam a origem. Seja*

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Então,

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3}{2t^2}\right) = 0 \quad e \quad \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{5t^3}{26t^2}\right) = 0.$$

Mas, isso não garante que o limite seja igual a zero. Nesta situação, utiliza-se a definição de limite para ter uma prova definitiva. Dado $\varepsilon > 0$ *qualquer, deve-se mostrar que existe* $\delta > 0$, *com* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *tal que*

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon \tag{4.12}$$

Então,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2 \mid y \mid}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon$ verificando a Eq. 4.12 e, portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

4.3 Propriedades dos Limites

Como vistas anteriormente, para funções de duas variáveis reais a valores reais, continuam válidas as seguintes propriedades dos limites, cujas demonstrações são exatamente iguais as feitas para funções de uma variável.

Proposição 4.3 (Propriedades do Limite)**.** *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de duas variáveis reais a valores reais. Suponha que existam os limites de f e de g no pontos (a_1, a_2), em que (a_1, a_2) é um ponto de acumulação dos domínios de $(f + g)$, $(f\,g)$ e (f/g). Então:*

P1) Existe o limite de $(f + g)$ no ponto (a_1, a_2) e

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} (f+g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y);$$

P2) Existe o limite de $(f\,g)$ no ponto (a_1, a_2) e

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} (f\,g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y);$$

P3) Existe o limite de f/g no ponto (a_1, a_2) e

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y)},$$

desde que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y) \neq 0.$$

Um caso particular da propriedade P2, e muito útil no cálculo de limites, é quando a função f é a função constante, ou seja, $f = k$. Neste caso,

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} (kg)(x,y) = k \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y).$$

Observação 4.3. *Tendo em vista que*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} k = k,$$

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} x = a_1,$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} y = a_2,$$

juntamente com as propriedades P1, P2 e P3, segue que, se $f(x,y)$ é uma função polinomial de duas variáveis, então

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = f(a_1,a_2).$$

Exemplo 4.10. *Resolvendo o limite abaixo,*

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 + 2xy + 7) = 1^2\,(2^3) + 2\,(1)\,(2) + 7 = 21,$$

pois a função $f(x,y) = x^2y^3 + 2xy + 7$ é uma função polinomial de duas variáveis.

Exemplo 4.11. *Analogamente ao Exemplo 4.10, segue*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1+1}{1^2+1^2} = 1,$$

pois a função

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

é uma função racional de duas variáveis.

Proposição 4.4 (Conservação do sinal)**.** *Se*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L,$$

em que $L > 0$; então, existirá um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D(f)$, $0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta \Longrightarrow f(x,y) > 0$.

Demonstração. Como $L > 0$ por hipótese, escolhendo $\varepsilon = L$, segue que

$$\mid f(x,y) - L \mid < L \Longleftrightarrow -L < f(x,y) - L < L \Longleftrightarrow 0 < f(x,y) < 2L.$$

Proposição 4.5 (Propriedade do Confronto). *Sejam* $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, (a_1, a_2) *um ponto de acumulação de* A. *Se*

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} h(x,y),$$

para $0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < r$. *Então,*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y) = L.$$

Demonstração. Por hipótese,

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} h(x,y).$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existem, $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que

$$0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta_1 \Longrightarrow \mid f(x,y) - L \mid < \varepsilon$$

e

$$0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta_2 \Longrightarrow \mid f(x,y) - L \mid < \varepsilon.$$

Escolhendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, r\}$, segue que

$$0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta \Longrightarrow L-\varepsilon < f(x,y) \leq g(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y) < L+\varepsilon.$$

Logo,

$$0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta \Longrightarrow \mid g(x,y) - L \mid < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} g(x,y) = L.$$

Exemplo 4.12. *Sabendo-se que*

$$2 \mid xy \mid - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{\mid xy \mid} < 2 \mid xy \mid,$$

para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. *Pode-se calcular o valor do limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{4 - 4\cos\sqrt{|\, xy \,|}}{|\, xy \,|} \right).$$

Considere a desigualdade

$$2 \mid xy \mid - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|\, xy \,|} < 2 \mid xy \mid . \tag{4.13}$$

Dividindo ambos os membros da Eq. 4.13 por $|\, xy \,|$ *segue que:*

$$2 - \frac{x^2y^2}{6 \mid xy \mid} < \frac{4 - 4\cos\sqrt{|\, xy \,|}}{|\, xy \,|} < 2 \mid xy \mid . \tag{4.14}$$

Levando em conta que

$$x^2 = \mid x \mid^2,$$

$$y^2 = \mid y \mid^2$$

e

$$|\, xy \,| = |\, x \,||\, y \,|,$$

a desigualdade dada pela Eq. 4.14 pode ser reescrita na forma

$$2 - \frac{|\, x \,||\, y \,|}{6} < \frac{4 - 4\cos\sqrt{|\, xy \,|}}{|\, xy \,|} < 2.$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2 - \frac{|\, x \,||\, y \,|}{6} \right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (2) = 2,$$

segue pela propriedade do confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{4 - 4\cos\sqrt{|\, xy \,|}}{|\, xy \,|} \right) = 2.$$

Observação 4.4. *Se* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função de duas variáveis reais a valores reais e* (a_1, a_2) *um ponto de acumulação de* A*, então*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} |\, f(x,y) \,| = 0.$$

De fato,

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x,y) \in A,$$

tal que

$$0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \Longrightarrow | f(x, y) - 0 | < L.$$

Então, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x, y) \in A$*, valem as seguintes implicações:*

$$0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \Longrightarrow || f(x, y) | - 0 | < L \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} | f(x, y) | = 0.$$

Proposição 4.6. *Sejam* $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*,* (a_1, a_2) *um ponto de acumulação de* A*. Se*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y) = 0$$

e

$$| g(x, y) | \leq M,$$

em que $M > 0$*, então para todo* $(x, y), 0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < r$*,*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y)g(x, y) = 0.$$

Demonstração. Para todo $(x, y) \in A$, vale que

$$| f(x, y)g(x, y) | = | f(x, y) || g(x, y) | \leq M | f(x, y) |,$$

ou seja,

$$-M | f(x, y) | \leq f(x, y)g(x, y) \leq M | f(x, y) | .$$

Se

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y) = 0,$$

segue que, de acordo com a Observação 4.4,

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} M | f(x, y) | = 0$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} -M | f(x, y) | = 0.$$

Assim, pela propriedade do confronto (Propriedade 4.5),

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y)g(x, y) = 0.$$

Exemplo 4.13. *Seja*

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}.$$

Pretende-se calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

De fato, observe que

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} = x\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

e

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\,\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

4.4 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 4.1. *Utilize a definição de limite para mostrar que:*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0.$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} k = k.$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (ax+by) = ax_0+by_0,\ a,b\neq 0.$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0.$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0.$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0.$

Exercício 4.2. *Mostre que os limites a seguir não existem.*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right).$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right).$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}\right).$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}\right).$

Exercício 4.3. *Utilize as propriedades dos limites para calcular*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}(x^3y).$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}(x^3y+y^3+3).$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+2}\right).$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x-y}{x^2-y^2}\right).$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x}{x^3+xy^2}\right).$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$

Exercício 4.4. *Calcule, caso exista, o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-2xh-k}{\|(h,k)\|}\right),$$

em que $f(x,y)=x^2+y$.

Capítulo 5

Continuidade

Sabe-se do curso de Cálculo I que, intuitivamente, uma função de uma variável é contínua quando é possível desenhar seu gráfico sem retirar o lápis do papel. Essa ideia foi formalizada pelo matemático Augustian Cauchy (1789-1857). Uma função f é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno da variável independente resultar num acréscimo infinitamente pequeno da variável dependente. Neste capítulo, estuda-se funções contínuas de duas variáveis reais a valores reais.

5.1 A Definição de Continuidade

Definição 5.1 (Continuidade em um ponto)**.** *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de duas variáveis reais a valores reais e* $(a_1, a_2) \in A$*, ponto de acumulação de* A*. Diz-se que a função* f *é contínua no ponto* (a_1, a_2) *se as seguintes condições forem satisfeitas simultaneamente:*

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y)$ *existir;*

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y) = f(a_1, a_2)$.

Equivalentemente, f *é contínua no ponto* (a_1, a_2)*, quando* $\forall\varepsilon > 0$*,* $\exists\delta > 0$*,* $(x, y) \in A$*, tal que*

$$\|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta \Longrightarrow | f(x, y) - f(a_1, a_2) | < \varepsilon.$$

Quando uma função não for contínua num determinado ponto, diz-se que tal função é *descontínua* nesse ponto. Convém enfatizar que a continuidade é um fenômeno local.

Definição 5.2 (Continuidade em um conjunto)**.** *Diz-se que* f *é contínua no conjunto* A *se* f *for contínua em todo ponto de* A*.*

O conceito de continuidade também pode ser facilmente estendido para funções de n variáveis reais a valores reais, como descrito na Definição 5.3

Definição 5.3 (Continuidade para funções de n variáveis)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis reais a valores reais e $a \in A$, ponto de acumulação de A. Diz-se que a função f é contínua no ponto a se*

a) $\lim_{x \to a} f(x)$ *existir;*

b) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Em termos de epsilons e deltas, f é contínua no ponto a, quando $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $x \in A$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(a) | < \varepsilon.$$

Exemplo 5.1. *A função constante $f(x, y) = k$ é contínua, pois,*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} k = f(a_1, a_2),$$

para todo $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 5.2. *A função $f(x, y) = x^3y^2 + 2xy + 4$, a qual é ilustrada na Figura 5.1, é contínua no ponto $(1, 0)$, pois,*

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} x^3y^2 + 2xy + 4 = 4 = f(1, 0).$$

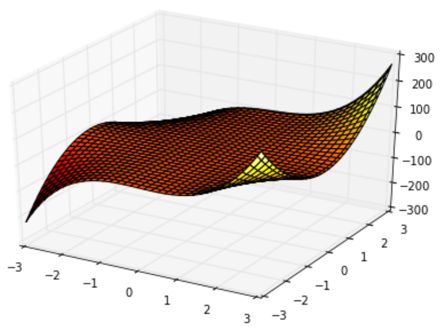

Figura 5.1: Gráfico da função $f(x, y) = x^3y^2 + 2xy + 4$.

Exemplo 5.3. *A função* $f(x, y) = x$ *é contínua, pois,*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} x = a_1 = f(a_1, a_2),$$

para todo $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$*. Na Figura 5.2, é ilustrado o gráfico da função* f*.*

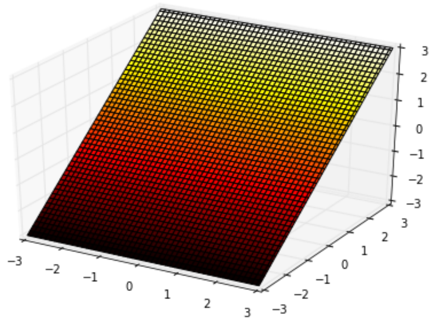

Figura 5.2: Gráfico da função $f(x, y) = x$.

O exemplo seguinte ilustra a verificação da continuidade através da epsilons e deltas de uma função definida em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.4. *A função projeção* $p_i(x) = x_i$*,* $i = 1, ..., n$ *é contínua em* $\mathbb{R}^n$*, pois, dado* $\varepsilon > 0$ *qualquer, existe* $\delta > 0$*, com* $x \in \mathbb{R}^n$*, tal que*

$$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow | x_i - a_i | < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Então,

$$| x_i - a_i | = \sqrt{(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} = \|x - a\| < \delta.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta = \varepsilon$*, verificando a Eq. 5.1 e, portanto, a função projeção é contínua em* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemplo 5.5. *A função*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \textit{se} \ \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \ \ \textit{se} \ \ (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

não é contínua no ponto $(0, 0)$*. De fato, escolhendo dois caminhos que levam à origem,* *por exemplo,* $\gamma_1(t) = (t, 0)$ *e* $\gamma_2(t) = (0, t)$*, tem-se*

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^2}{t^2}\right) = 1$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{-t^2}{t^2}\right) = -1.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *não existe, e, portanto, a função* f *não é contínua em* $(0, 0)$*.*

Definição 5.4 (Função prolongável por continuidade)**.** *Uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se prolongável por continuidade a um ponto* (a_1, a_2)*, quando* $(a_1, a_2) \in A \cap A'$ *e existe o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y).$$

Neste caso, chama-se prolongamento por continuidade de f*, ao ponto* (a_1, a_2)*, a função* g *definida por*

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \textit{se} \quad (x, y) \in A, \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x, y), & \textit{se} \quad (x, y) = (a_1, a_2). \end{cases}$$

Exemplo 5.6. *O prolongamento por continuidade da função*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

ao ponto $(0, 0)$*, é a função definida por*

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}, & \textit{se} \quad x \neq y, \\ 0, & \textit{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5.2 Propriedades das Funções Contínuas

As funções contínuas possuem inúmeras propriedades importantes. Nesta seção, destacam-se algumas delas para o caso $n = 2$. Todos os resultados podem ser estendidos para funções de n variáveis.

Proposição 5.1 (Construindo funções contínuas)**.** *Sejam* f *e* g *funções de duas variáveis reais a valores reais, de domínios* A *e* B*, respectivamente. Suponha-se que* f *e* g *são contínuas no ponto* $(a_1, a_2) \in A \cap B$*. Então, as funções* $f + g$*,* $f\,g$*, e* f/g *[se* $g(a_1, a_2) \neq 0$*] são contínuas no ponto* $.(a_1, a_2)$*.*

Demonstração. Segue diretamente da definição e das propriedades dos limites.

Exemplo 5.7. *Combinando o Exemplo 5.4 com a Proposição 5.1, segue que toda função polinomial é contínua em todo seu domínio.*

Exemplo 5.8. *A função racional*

$$f(x,y) = \frac{x^2y+5}{x^2-y}$$

é contínua em qualquer ponto do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq x^2\}$.

Exemplo 5.9. *As funções* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *e* $g(x,y) = x^2y + 4xy$ *são contínuas no ponto* $(1,1)$. *Logo, as funções*

$$(f+g)(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4xy,$$

$$(f\,g)(x,y) = x^4y + 4x^3y + x^2y^3 + 4xy^3$$

e

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y+4xy}$$

também são contínuas no ponto $(1,1)$.

Proposição 5.2 (Composição de funções contínuas)**.** *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções, tais que* $f(A) \subset B$. *Seja* $(a_1,a_2) \in A$, *tal que* f *seja contínua no ponto* (a_1,a_2). *Suponha-se ainda que* g *seja contínua em* $f(a_1,a_2)$. *Então, a função* g *composta com* f, gof, *é contínua no ponto* (a_1,a_2).

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ e sendo g contínua em $f(a_1,a_2)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$y \in B, \mid y - f(a) \mid < \delta_1 \Longrightarrow \mid g(y) - g(f(a_1,a_2)) \mid < \varepsilon.$$

Por outro lado, sendo f contínua no ponto (a_1,a_2), existe $\delta > 0$ tal que

$$(x,y) \in A, \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta \Longrightarrow \mid f(x,y) - f(a_1,a_2) \mid < \delta_1.$$

Então, para $(x,y) \in A \cap B$, segue:

$$\|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta \Longrightarrow \mid f(x,y) - f(a_1,a_2) \mid < \delta_1 \Longrightarrow \mid (gof)(x,y) - (gof)(a_1,a_2) \mid < \varepsilon.$$

Exemplo 5.10. *A função*

$$h(x,y) = e^{x+y},$$

a qual está ilustrada na Figura 5.3, é contínua em todo $\mathbb{R}^2$. De fato, note que h pode ser reescrita como $h = gof$, em que $f(x, y) = x + y$ é contínua (pois é uma soma de funções contínuas) e $g(t) = e^t$ também é contínua.

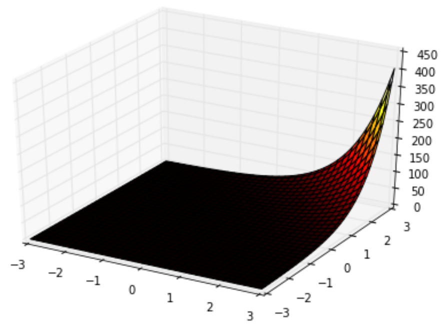

Figura 5.3: Gráfico da função $f(x, y) = e^{x+y}$.

Corolário 5.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais, contínua no ponto $(a_1, a_2) \in A$. Então, a função $\mid f \mid$ também é contínua no ponto (a_1, a_2).*

5.3 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 5.1. *A função $f(x, y) = x^2 + 2y + 4$ é contínua no ponto $(1, -2)$?*

Exercício 5.2. *Prove que a função $f(x, y) = x + y$ é contínua no ponto $(1, 2)$.*

Exercício 5.3. *Verifique se a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \sin(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é contínua no ponto $(0, 0)$.

Exercício 5.4. *Verifique que a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

é contínua na origem.

Exercício 5.5. *Investigue a continuidade da função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no ponto $(0,0)$.

Exercício 5.6. *Prove que a função* $f(x) = \|x\|$ *é contínua em* $\mathbb{R}^n$.

Exercício 5.7. *Determine o conjunto de pontos de continuidade de cada função a seguir. Justifique a resposta.*

a) $f(x,y) = 4x^2y^3 + 2xy - 1$.

b) $f(x,y) = \dfrac{1-xy}{x-y}$.

c) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y + 4xy + 9}{x^2 - y^2}$.

Exercício 5.8. *A afirmação:*

"A função $f(x,y) = \sin(x^3y + 2x^2y + xy)$ *é contínua em todo* $\mathbb{R}^2$*"*

é verdadeira? Justifique sua resposta.

Exercício 5.9. *Considere a função* $f(x,y) = x, \log(x\,y)$. *Indique, justificando, em que pontos essa função é contínua.*

Exercício 5.10. *Determine* $h(x,y) = g(f(x,y))$ *e o conjunto no qual a função* h *é contínua.*

a) $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x,y) = 2x + 3y - 6$.

b) $g(t) = t + \ln t$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

c) $g(t) = 1/t$, $f(x,y) = x - y$.

Capítulo 6

Derivadas Parciais

Neste capítulo, estuda-se derivadas de funções de duas ou mais variáveis e algumas de suas aplicações.

6.1 Derivadas Parciais

Definição 6.1 (Derivada Parcial)**.** *Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais a valores reais, e, seja (a_1, a_2) um ponto do domínio de f. Fixado a_2, pode-se considerar a função g de uma variável definida por*

$$g(x) = f(x, a_2).$$

A derivada desta função g, no ponto $x = a_1$, caso exista, denomina-se derivada parcial da função f, em relação a x, no ponto (a_1, a_2); e será denotada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$$

ou

$$f_x(a_1, a_2).$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \frac{dg}{dx}(a_1).$$

De acordo com a definição de derivada, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) &= \lim_{x\to a_1}\frac{g(x)-g(a_1)}{x-a_1}\\ &= \lim_{x\to a_1}\frac{f(x,a_2)-f(a_1,a_2)}{x-a_1}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h}.\end{aligned}$$

De modo análogo, define-se *a derivada da função f, em relação a y, no ponto (a_1,a_2)* como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a_1,a_2+k)-f(a_1,a_2)}{k}.$$

Definição 6.2 (Derivada Parcial como uma Função)**.** *Considere o seguinte subconjunto do domínio da função f*

$$B = \left\{(x,y)\in D(f);\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \textit{ existe}\right\}.$$

Considere uma nova função, denotada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

e definida em B, de modo que a cada $(x,y)\in B$ faz corresponder o número real

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{h}.$$

Tal função denomina-se função derivada parcial de f, em relação a x ou simplesmente, derivada parcial de f em relação a x. Analogamente, define-se a função derivada parcial de f em relação a y.

A noção de derivada parcial, vista para funções de duas variáveis, generaliza-se facilmente para funções de n variáveis reais a valores reais.

Definição 6.3 (Derivada Parcial para uma função de n variáveis)**.** *Seja $f : A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x=(a_1,...,a_n)\in A$. Para cada $i=1,...,n$, a derivada parcial de f, em relação a x_i, é denotada e definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,...,a_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{h},$$

desde que o limite exista e seja finito.

Exemplo 6.1. *Dada a função $f(x,y) = x + 2y$, tem-se as seguintes derivadas parciais em relação a x e y, respectivamente,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h+2y-x-2y}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x+2(y+k)-x-2y}{k} = \lim_{k\to 0} 1 = 1.$$

Note que no Exemplo 6.1, para qualquer que seja o ponto (x,y), as derivadas parciais da função f, tanto em relação a x quanto em relação a y, são constantes.

Exemplo 6.2. *Dada a função $f(x,y) = x^2y + x$, tem-se*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2y + x + h - x^2y - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2xy + hy + 1 = 2xy + 1.\end{aligned}$$

Em particular, se $(x,y) = (1,2)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 5.$$

Observação 6.1. *Pode-se utilizar as regras de derivação de funções de uma variável para o cálculo de derivadas parciais. Se numa vizinhança do ponto (x,y), a função é definida por uma única expressão, para se obter $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, mantém-se y constante e deriva-se a função f em relação a x. Da mesma forma, para se obter $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, mantém-se x constante e deriva-se a função f em relação a y.*

Exemplo 6.3. *Dada a função $f(x,y) = 5x^4y^2 + x^2y^3 + 5$, tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 20x^3y^2 + 2xy^3$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10x^4y + 6x^2y^2.$$

Exemplo 6.4. *Se* $f(x,y) = e^{x^2+y^5}$, *então*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+y^5}) = 2x\, e^{x^2+y^5}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2+y^5}) = 5y^4\, e^{x^2+y^5}.$$

Exemplo 6.5. *Se* $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$, *utilizando a regra do produto, segue*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2)]\, \ln(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\left[\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right] \\ &= 2x\, \ln(x^2+y^2) + 2x \\ &= 2x\,[1+\ln(x^2+y^2)].\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se a derivada de f com relação a y.

Exemplo 6.6. *Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}, & \textit{se}\ \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{se}\ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Para calcular a derivada de f *em relação a* x, *pode-se utlizar a regra do quociente, como segue: para* $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)^2 - (x^3-y^2)^2 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por outro lado, para $(x,y) = (0,0)$ *utiliza-se a definição,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \textit{se}\ \ (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \textit{se}\ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

6.2 Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$$

e seja $P = (a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ um ponto de S. Intersectando a superfície S com o plano de equação $y = a_2$, obtém-se uma curva, C_1, contida no plano $y = a_2$ e de equação

$$z = f(x, a_2) = g(x),$$

como ilustrada na Figura 6.1.

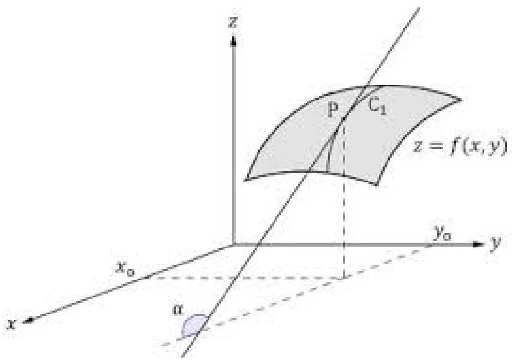

Figura 6.1: Interseção da superfície S com o plano $y = a_2$.

Desse modo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}((a_1, a_2)) = g^{'}(a_1) = \tan \alpha,$$

em que $g^{'}(a_1)$ denota o coeficiente angular da reta r, contida no plano $y = a_2$ e tangente à curva C_1 no ponto P.

Analogamente, intersectando a superfície S com o plano plano de equação $x = a_1$, obtém-se uma curva, C_2, contida no plano $x = a_1$ e de equação

$$z = f(a_1, y) = h(x),$$

como apresentado na Figura 6.2.

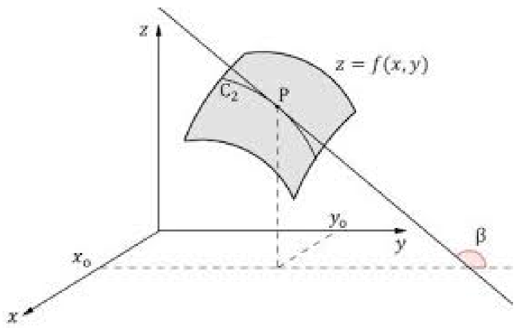

Figura 6.2: Interseção da superfície S com o plano $x = a_1$.

Então, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = h^{'}(a_1) = \tan\beta,$$

em que $h^{'}(a_1)$ denota o coeficiente angular da reta s, contida no plano $x = a_1$ e tangente à curva C_2 no ponto P.

6.3 Derivadas Parciais Vistas como Taxas de Variação

As derivadas parciais podem ser vistas como taxas de variação instantâneas. Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de duas variáveis reais a valores reais, A um aberto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ representa a taxa de variação da função f ao longo da reta que passa pelo ponto (a_1, a_2) e na direção do vetor canônico $i = (1, 0)$.

Analogamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ representa a taxa de variação da função f ao longo da reta que passa pelo ponto (a_1, a_2) e na direção do vetor canônico $j = (1, 0)$.

Exemplo 6.7. *A área A da superfície lateral de um cone circular reto de altura h e raio da base r é dada por*

$$A(r, h) = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}.$$

Se r é mantido fixo em $3cm$, enquanto h varia, a taxa de variação de A em relação a h, no instante em que a altura é de $7cm$ é dada pela derivada parcial da função A, em relação a h, calculada no ponto $(3, 7)$, ou seja,

$$\frac{\partial A}{\partial h}(3, 7) = 21\,\pi(7^2 + 3^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{21\pi}{\sqrt{58}}.$$

Exemplo 6.8. *Suponha que a produção diária Q de uma fábrica dependa do montante K de capital (medido em unidade de $R\$1000,00$) investido na instalação e equipamento e também da mão de obra L (medida em trabalhadores por hora). Em Economia as* *derivadas parciais Q_K e Q_L são conhecidas como a produtividade marginal ou produtos marginais do capital e do trabalho, respectivamente. O produto marginal do trabalho Q_L é a taxa na qual a produção Q varia em relação ao trabalho L para um nível fixo K de capital investido. Assim, Q_L é aproximadamente a variação na produção que resultará se o capital for mantido fixo e o trabalho for aumentado de 1 trabalhador por hora. Analogamente, o produto marginal do capital Q_K é aproximadamente a variação na produção que resultará se a mão de obra for mantida fixa e o capital investido for aumentado de uma unidade.*

Observação 6.2. *Em Economia, o termo análise marginal se refere a prática de utilizar uma derivada para estimar a variação no valor de uma função resultante de um aumento de uma unidade em uma de suas variáveis.*

6.4 Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Definição 6.4. *Seja $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ funções de duas variáveis reais a valores reais, pode-se considerar as derivadas parciais dessas funções. Logo, as derivadas parciais de segunda ordem da função f são definidas como*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

A partir das derivadas parciais de segunda ordem obtém-se as derivadas parciais de terceira ordem de f e assim sucessivamente.

Definição 6.5. *As derivadas f_{xy}, f_{yx} são chamadas de derivadas mistas.*

Observação 6.3. *Se k é um número inteiro positivo, então há 2^k derivadas parciais de ordem k.*

Exemplo 6.9. *Dada a função*

$$f(x, y) = x^2y^3 + 2xy + e^x + 1,$$

suas derivadas parciais de primeira ordem são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + 2y + e^x$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + 2x.$$

Em relação as derivadas parciais de segunda ordem, têm-se

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 2y + e^x) = 2y^3 + e^x;$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 2x) = 6x^2y;$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 2y + e^x) = 6xy^2 + 2;$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + 2x) = 6xy^2 + 2.$$

Exemplo 6.10. *A equação*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

denomina-se equação de Laplace. Uma função que satisfaz a equação de Laplace é denominada função harmônica. Por exemplo, a função $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ é harmônica, pois, calculando as derivadas parciais

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2) - 2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Verifica-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Portanto, a função f é harmônica.

Definição 6.6 (Função de duas variável e classe C^2)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis, definida no aberto A. Se as derivadas parciais de segunda ordem de f existirem e forem contínuas em cada $x \in A$, diz-se que a função f é de classe C^2 em A e denota-se por $f \in C^2$.*

Teorema 6.1 (Schwarz). *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A um conjunto aberto. Se f for de classe C^2 em A, então*

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx},$$

para todo $(x,y) \in A$.

Exemplo 6.11. *A função $f(x,y) = x^2 + y^3$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ (Verifique!). Logo,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 6.12. *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \qquad\quad , & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pretende-se calcular $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$. Primeiro, calcula-se as derivadas parciais de primeira ordem de f. Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, pode-se aplicar a regra do quociente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

No ponto $(x,y) = (0,0)$, utiliza-se a definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad , & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analogamente, obtêm-se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. *Para* $(x,y) \neq (0,0)$, *tem-se*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

No ponto $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 \quad , & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

As derivadas mistas no ponto $(x,y) = (0,0)$ *são dadas por*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = 1.$$

Observe que as derivadas mistas de f calculadas no ponto $(0,0)$ são diferentes. Isso contraria o teorema de Schwarz?

Definição 6.7 (Função de n variáveis e classe C^2)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n$ uma função que possui derivadas parciais de primeira ordem em todo ponto $x \in A$. A j-ésima derivada parcial da função,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) : A \longrightarrow \mathbb{R},$$

no ponto $x \in A$, será denotada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x), \qquad\qquad i,j = 1...,n.$$

Se essas derivadas parciais de segunda ordem existirem em cada ponto $x \in A$ e forem funções contínuas, então a função f diz-se de classe C^2.

O Teorema 6.2 é uma versão do Teorema de Schwarz para funções de n variáveis.

Teorema 6.2 (Teorema de Schwarz para funções de n variáveis)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,*

A um conjunto aberto. Se f for de classe C^2 em A, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x),$$

para quaisquer $i, j = 1..., n$ e $x \in A$.

6.5 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 6.1. *Considere uma função função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Defina as derivada parcial de primeira ordem de $f(x, y)$ em relação às variáveis x e y. Interprete-as como taxa de variação.*

Exercício 6.2. *Utilize a definição para calcular as derivadas parciais da função $f(x, y) = 2x^2 + y$ em $(1, 2)$.*

Exercício 6.3. *Determine as derivadas parciais.*

$a) f(x, y) = 5x^4y + 2xy - 1$

$b) f(x, y) = \cos(xy)$

$c) f(x, y) = xye^{xy}$

$d) f(x, y) = x^y$

$e) f(x, y) = xy\ln(x^2 + y^3)$

$f) f(x, y) = \dfrac{x \sin x^2 y}{\cos(x^2 + y^2)}$

$g) f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}$

$h) f(x, y) = \arctan(x - y)$

Exercício 6.4. *Mostre que a função de produção de Cobb-Douglas,*

$$P = bL^\alpha K^\beta,$$

satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P.$$

Exercício 6.5. *Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = z.$$

Exercício 6.6. *Seja $s = f(x, y, z, w)$ dada por $s = e^{\frac{x}{y} - \frac{z}{w}}$. Verifique que*

$$xs_x + ys_y + zs_z + ws_w = 0.$$

Exercício 6.7. *No estudo de penetração do congelamento, descobriu-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em metros) pode ser* *modelada pela função*

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\xi x} sen\,(\omega t - \xi x),$$

em que $\omega = 2\pi/365$ *e* ξ *é uma constante.*
a) Determine T_x*. Qual seu significado físico?*
b) Determine T_t*. Qual seu significado físico?*
c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ *para uma certa constate* k*.*

Exercício 6.8. *Para um certo mercado varejista está determinado que se* x *for o número diário de comerciais na televisão,* y *for o número de minutos de duração de cada comercial e* z *for o número de unidades vendidas diariamente, então* $z = 2xy^2 + x^2 + 9000$*. Suponha que no momento presente haja 12 comerciais, cada um com um minuto de duração por dia.*
a) Ache a taxa de variação de z *por unidade de variação em* x *se* y *permanecer fixo em 1.*
b) Use o resultado da parte (a) para aproximar a variação nas vendas diárias, se o número de comerciais com um minuto for aumentado em 25%.
c) Ache a taxa de variação de z *por unidade de variação em* y *se* x *permanecer fixo em 12.*
d) Use o resultado da parte (c) para aproximar a variação das vendas diárias se a duração de cada um dos 12 comerciais for aumentada em 25%*.*

Exercício 6.9. *Seja* x *a quantia em dinheiro (em milhões de reais) investida no estoque de uma loja,* y *o número de empregados na loja e* P *o lucro semanal da loja,*

$$P(x,y) = 3000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^{,}$$

em que $15 \leq x \leq 25$ *e* $5 \leq y \leq 12$*. No momento, o estoque é de 180000,00 milhões e há 8 empregados.*
a) Ache a taxa de variação de P por unidade de variação em x *se* y *for mantido fixo em 8.*
b) Use o resultado da parte (a) para achar a variação aproximada no lucro semanal, se o estoque variar de 180000 para 200000,00 milhões e o número de empregados permanecer fixo em 8.
c) Ache a taxa de variação de P por unidade de variação em y *se* x *for mantido fixo em 8.*
d) Use o resultado da parte (c) para encontrar a variação aproximada no lucro semanal,

se o número de empregados for aumentado de 8 para 10, com o estoque fixo em 180000,00 milhões.

Exercício 6.10. *Se uma função* $f(x, y)$ *tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas em uma região aberta* $R \subset \mathbb{R}^2$*, as derivadas parciais de primeira ordem de* f *devem ser contínuas em* R*? Justifique sua resposta.*

Exercício 6.11. *Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x + y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \qquad\quad , & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 6.12. *Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem de cada função a seguir.*

$a) f(x, y) = 5x^4y + 2xy - 1$ $\qquad$ $b) f(x, y) = e^{x^2-y^2}$

$c) f(x, y) = x^3 + 2y^3$ $\qquad$ $d) f(x, y) = x + y$

$e) f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ $\qquad$ $f) f(x, y) = 4x^3y^4 + y^3$

$g) f(x, y) = 9xy$ $\qquad$ $h) f(x, y) = x \cos y$

Exercício 6.13. *Verifique que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *em que* $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Capítulo 7

Funções Diferenciáveis e Diferencial

Neste capítulo, estuda-se o fenômeno de diferenciabilidade e a diferencial para funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais.

7.1 A Definição de Diferenciabilidade

Definição 7.1 (Diferenciabilidade em um ponto)**.** *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais e $a_1 \in I$. Diz-se que f é diferenciável no ponto a_1, ou derivável no ponto a_1, se, e somente se, o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h}$$

existir e for finito.

A Definição 7.1 não é adequada para generalização, pois se f for uma função de duas variáveis reais a valores reais h será um par ordenado e, então, o limite não terá sentido. Supondo f diferenciável no ponto a_1, existe um número real d, $d = f^{'}(a_1)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h} = d.$$

Tem-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h} = d \Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h) - f(a_1) - dh}{h} = 0.$$

Levando em conta que

$$\lim_{h \to 0} \frac{W(h)}{h} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{W(h)}{\mid h \mid} = 0,$$

resulta

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h)-f(a_1)}{h}=a \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h)-f(a_1)-dh}{\mid h\mid}=0.$$

Portanto, f é diferenciável no ponto a_1 se, e somente se, existir um número real $d=f^{'}(a_1)$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h)-f(a_1)-dh}{h}=0.$$

Definição 7.2 (Extensão de diferenciabilidade para função de duas variáveis)**.** *Sejam $f: A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, A um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $(a_1,a_2)\in A$. A função f é diferenciável no ponto $(a_1,a_2)\in A$ se, e somente se, existirem as derivadas parciais de primeira ordem de f, calculadas no ponto $(a_1,a_2)\in A$, tais que*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1,a_2)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)}{\|(h,k)\|}=0.$$

Definição 7.3 (Diferenciabilidade em um intervalo)**.** *Diz-se que uma função $f: A\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ é diferenciável em $B\subset A$ se f for diferenciável em topo ponto $(x,y)\in B$.*

Definição 7.4 (Diferenciabilidade em todo o domínio)**.** *A função f diz-se diferenciável se for diferenciável em todo ponto de seu domínio.*

Exemplo 7.1. *Para mostrar que a função $f(x,y)=x^2y$ é diferenciável, é preciso mostrar que f admite derivadas parciais de primeira ordem e, além disso,*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1,a_2)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)}{\|(h,k)\|}=0.$$

As derivadas parciais de f existem, em qualquer ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2.$$

Por outro lado, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(x+h)^2(y+k)-x^2y-2xyh-x^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{2xhk+h^2y+h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Para se calcular o limite anterior, leva-se em conta que, para $(h, k) \neq (0, 0)$*,*

$$\frac{\mid h \mid}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{2xhk + h^2y + h^2k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[2xh\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + hy\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + hk\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, a função f *é diferenciável em todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, ou seja,* f *é uma função diferenciável.*

Definição 7.5 (Extensão de diferenciabilidade para função de n variáveis)**.** *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*,* A *aberto e* $a = (a_1, ..., a_n) \in A$*. A função* f *diz-se diferenciável no ponto* a *se, e somente se, existem* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$*,* $i = 1, ..., n$ *e*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{\|h\|} = 0.$$

Proposição 7.1. *Sejam* $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis no ponto* $(a_1, a_2) \in A$*,* A *aberto de* $\mathbb{R}^2$*. Então, as funções* $(f + g)$*,* (fg) *e* (f/g) *[com* $g(a_1, a_2) \neq 0$*], são diferenciáveis no ponto* (a_1, a_2)*.*

Proposição 7.2. *Se uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *é diferenciável no ponto* $(a_1, a_2) \in A$*,* A *aberto de* $\mathbb{R}^2$*, então* f *é contínua nesse ponto.*

7.2 Critério de Diferenciabilidade

Proposição 7.3 (Critério de Diferenciabilidade)**.** *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função que admite todas as derivadas parciais numa vizinhança* V *do ponto* $(a_1, a_2) \in A$*. Se as funções*

$$(a_1, a_2) \in V \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}, \qquad j = 1, 2,$$

forem contínuas, então f *é diferenciável no ponto* (a_1, a_2)*.*

A proposição anterior diz que se f admite derivadas parciais em uma vizinhança de

(a_1, a_2), e se essas são contínuas no ponto (a_1, a_2), então f será diferenciável nesse ponto.

Exemplo 7.2. *A função $f(x, y) = \cos(x^2 + y^3)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \sin(x^2 + y^3)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 \sin(x^2 + y^3)$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

A recíproca da proposição anterior não é verdadeira, porque existem funções que são diferenciáveis num ponto sem que as derivadas parciais sejam contínuas nesse ponto. O próximo exemplo exibe um desses casos.

Exemplo 7.3. *A função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin(x\,y), & x \neq 0, \\ y \qquad\quad , & x = 0, \end{cases}$$

é contínua se $x = 0$, bem como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(xy).$$

Entretanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\cos(xy) - \sin(xy)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , & x = 0, \end{cases}$$

não é contínua se $x = 0$. Todavia, f é diferenciável na origem.

7.3 Aplicação da Diferenciabilidade: Plano Tangente

Uma aplicação imediata da diferenciabilidade de funções de duas variáveis reais a valores reais é a existência de plano tangente a superfície.

Se f é diferenciável no ponto (a_1, a_2), tem-se que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) - h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) - k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)}{\|(h, k)\|} \right) = 0.$$

Fazendo $x = a_1 + h$ e $y = a_2 + k$, resulta

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \left(\frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2)}{\|(x,y)-(a_1,a_2)\|} \right) = 0.$$

Denota-se por $r(x,y)$ o erro que se comete na aproximação de f por

$$T(x,y) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2).$$

Assim,

$$f(x,y) = T(x,y) + r(x,y),$$

em que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \left(\frac{r(x,y)}{\|(x,y)-(a_1,a_2)\|} \right) = 0.$$

A função $T(x,y)$ é a única função afim que se aproxima $f(x,y)$ com erro $r(x,y)$ tendendo a zero mais rapidamente que $\|(x,y)-(a_1,a_2)\|$, quando (x,y) tende a (a_1,a_2).

Definição 7.6 (Equação do plano tangente)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto (a_1,a_2). A equação*

$$z - f(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2)$$

denomina-se equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a_1,a_2,f(a_1,a_2))$.

Observação 7.1. *Se a função f não for diferenciável no ponto (a_1,a_2), mas admitir derivadas parciais neste ponto, então o plano dado pela equação anterior existirá, mas não será plano tangente.*

Exemplo 7.4. *A equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = xy$ no ponto $(1,2,2)$ é dada por*

$$z - 2 = 2(x-1) + (y-2) \iff 2x + y - z - 2 = 0.$$

Exemplo 7.5. *A equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = y\ln x$ no ponto $(e,2,2)$ é dada por*

$$z - 2 = \frac{2}{e}(x-e) + y - 2 \iff 2x + ey - ez - 2e = 0.$$

7.4 Diferencial

Nesta seção, apresenta-se a definição de diferencial para uma função de duas variáveis e estende-se essa definição para funções de n variáveis reais a valores reais.

Definição 7.7 (Funcional linear)**.** *Um funcional linear em $\mathbb{R}^2$ é uma função $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpre as seguintes condições:*

- $L(x + y) = L(x) + L(y)$*,*
- $L(\alpha.x) = \alpha\, L(x)$*,*

para quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Um funcional linear em $\mathbb{R}^2$ tem a forma geral $L(x, y) = \alpha\, x + \beta\, y$, em que α e β são números reais. Isto é, cada funcional linear em $\mathbb{R}^2$ é caracterizado unicamente por um par ordenado (α, β).

Definição 7.8 (Diferencial para função de duas variáveis)**.** *Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto (a_1, a_2). Considere o funcional linear*

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)k.$$

Com isso,

$$f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)k + r(h, k),$$

em que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

O funcional linear

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)k$$

denomina-se diferencial de f em (a_1, a_2).

Observe, na Definição 7.8, que o funcional que define a diferencial é determinado unicamente pelo par ordenado

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\right).$$

Exemplo 7.6. *Seja*

$$T(x, y) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2).$$

Sabe-se que o gráfico de T é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$. Fazendo $x = a_1 + h$ e $y = a_2 + k$, segue que

$$T(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)k.$$

Então $L(h, k)$ é a variação que sofre T, quando se passa do ponto (a_1, a_2) ao ponto $(a_1 + h, a_2 + k)$. Por outro lado, $f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2)$ é a variação em f, quando se passa do ponto (a_1, a_2) para o ponto $(a_1 + h, a_2 + k)$. Tem-se que

$$f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) \cong \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)k,$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem os valores absolutos de h e de k.

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável de duas variáveis reais a valores reais. Em notação clássica, a diferencial de f no ponto (x, y), relativa aos acréscimos dx e dy é denotada por dz ou $df(x, y)$, ou seja,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

Denota-se por Δz a variação em f, quando se passa do ponto (x, y) para o ponto $(x + dx, y + dy)$,

$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Assim,

$$\Delta z \cong dz.$$

Definição 7.9 (Diferencial para função de n variáveis)**.** *Se f é uma função diferenciável de n variáveis reais a valores reais, a diferencial de f no ponto $a = (a_1, ..., a_n)$, relativa aos acréscimos $dx_1, ..., dx_n$ é definida por*

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i.$$

Exemplo 7.7. *Dada a função $z = \sqrt{xy}$, sua diferencial é dada por*

$$dz = \frac{x}{2\sqrt{xy}}dx + \frac{y}{2\sqrt{xy}}dy.$$

Através da diferencial dessa função, é possível calcular um valor aproximado para a *variação* Δz *em* z*, quando se passa do ponto* $(1,1)$ *para* $(1,02;1,01)$*. Observe que,*

$$\Delta z \cong \frac{x}{2\sqrt{xy}}dx + \frac{y}{2\sqrt{xy}}dy.$$

Fazendo $x = 1$*,* $y = 2$*,* $dx = 0,02$ *e* $dy = 0,01$*, resulta* $\Delta z \cong \frac{1}{2}(0,02) + \frac{1}{2}(0,01) = 0,015$ *É possível calcular o erro cometido na aproximação feita.*

Exemplo 7.8. *Dada a função* $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$*, sua diferencial é dada por*

$$dz = -\frac{x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}} - \frac{y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}} = \frac{-xdx - ydy}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}.$$

Para avaliar $f(0,99;1,02)$ *utilizando a diferencial, observa-se que, partindo do ponto* $(1,1)$ *para o ponto* $(0,99;1,02)$*, têm-se que* $dx = -0,01$ *e* $dy = 0,02$*. Assim,*

$$dz = \frac{0,01 - 0,02}{2} = -0,005.$$

Logo, como $f(1,1) = 2$*, segue que* $f(0,99;1,02) \cong f(1,1) + dz = 1,995$*.*

7.5 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 7.1. *Considere uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*,* A *um aberto de* $\mathbb{R}^2$ *e* $(x_0, y_0) \in A$*.*
(a) O que significa dizer que a função f *é diferenciável no ponto* $(x_0, y_0) \in A$*?*
(b) Mostre que se f *é diferenciável em* $(x_0, y_0) \in A$*, então* f *será contínua nesse ponto.*

Exercício 7.2. *Utilize a definição para mostrar que as funções dadas são diferenciáveis.*
a) $f(x,y) = xy$*.*
b) $f(x,y) = x^2y^2$*.*
c) $f(x,y) = x + y$*.*

Exercício 7.3. *Mostre que a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \quad se \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$*.*

Exercício 7.4. *Justifique a afirmação: "A função* $f(x,y) = \cos(x^2+2xy-1)$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}^2$*".*

Exercício 7.5. *Determine a equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.*
a) $f(x, y) = 2x^2y$ *em* $(1, 1, f(1, 1))$.
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *em* $(0, 1, f(0, 1))$.
c) $f(x, y) = \arctan(x - 2y)$ *em* $(2, 1/2, f(2, 1/2))$.

Exercício 7.6. *Determine o plano que passa pelos pontos* $(1, 1, 2)$ *e* $(-1, 1, 1)$ *e que seja tangente ao gráfico de* $f(x, y) = xy$.

Exercício 7.7. *Determine o plano que seja paralelo ao plano* $z = 2x + y$ *e tangente ao gráfico de* $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Exercício 7.8. *Calcule a diferencial:*
a) $z = x^3y^2$.
b) $z = x \arctan(x + 2y)$.
c) $z = \sin(xy)$.

Exercício 7.9. *Mostre que a diferencial de uma função de duas variáveis reais a valores reais é um funcional linear.*

Exercício 7.10. *Defina diferencial de uma função de três variáveis reais a valores reais.*

Exercício 7.11. *Seja* $z = e^{x^2-y^2}$. *Calcule um valor aproximado para a variação* Δz *em* z, *quando se passa de* $x = 1$ *e* $y = 1$ *para* $x = 1,01$ *e* $y = 1,002$.

Exercício 7.12. *Calcule um valor aproximado para a variação* ΔA *na área de um retângulo quando os lados variam de* $x = 2\,m$ *e* $y = 3\,m$ *para* $x = 2,01\,m$ *e* $y = 2,97\,m$.

Exercício 7.13. *Calcule, por meio de diferenciais, um valor aproximado para* $(1,01)^{2,03}$.

Exercício 7.14. *Calcule, por meio de diferenciais, um valor aproximado para* $\sqrt{1,01}$.

Exercício 7.15. *A altura de um cone é* $h = 20\,cm$ *e o raio da base* $r = 12\,cm$. *Calcule um valor aproximado para a variação* ΔV *no volume quando* h *aumenta* $2\,mm$ *e* r *decresce* $1\,mm$.

Capítulo 8

Derivação de Funções Compostas

Pode-se formar funções compostas de várias variáveis em domínios apropriados da mesma maneira feita para funções compostas de uma variável. Neste capítulo, mostra-se como obter derivadas parciais de funções compostas de várias variáveis.

8.1 A Regra da Cadeia

Sabe-se, do Cálculo Diferencial de funções de uma variável real a valores reais que se $y = f(x)$ e $x = g(t)$ são funções diferenciáveis, então a função $f(g(t))$ é diferenciável e vale

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Tal relação é conhecida por Regra da Cadeia para funções de uma variável real a valores reais. Note que a variável y depende de x e esta por sua vez depende da variável t. Pretende-se enunciar o caso em que a primeira variável depende de m variáveis e estas m dependem de n variáveis.

Considera-se, inicialmente, alguns casos particulares da Regra da Cadeia. Em seguida, apresenta-se o caso geral, omitindo a respectiva demonstração.

Proposição 8.1 (Regra da cadeia - Caso 1)**.** *Se $w = f(x, y)$ é uma função diferenciável e x e y são funções diferenciáveis de t, então a função w é diferenciável de t e*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Exemplo 8.1. *Seja $w = xy$ e $x = \cos t$ e $y = \sin t$. Aplicando a regra da cadeia (Caso*

1), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= y[-\sin(t)] + x[\cos(t)] \\
&= [\sin(t)][-\sin(t)] + [\cos(t)\ \cos(t)] \\
&= -\sin^2(t) + \cos^2(t) \\
&= \cos 2t.
\end{aligned}$$

No Exemplo 8.1, o resultado poderia ser verificado de uma forma mais direta. De fato, se $w = xy$ e $x = \cos t$, $y = \sin t$, então $w = \cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$. Logo,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right) = \cos(2t).$$

Proposição 8.2 (Regra da cadeia - Caso 2)**.** *Se $w = f(x, y, z)$ é uma função diferenciável e x,y e z são funções diferenciáveis de t, então w será uma função diferenciável de t e*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Exemplo 8.2. *Seja $w = xy + z$ e $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = t$. Aplicando a regra da cadeia, segue que*

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= y(-\sin t) + x(\cos t) + 1(1) \\
&= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 \\
&= 1 + \cos 2t.
\end{aligned}$$

Proposição 8.3 (Regra da cadeia - Caso 3)**.** *Se $w = f(x, y)$ é uma função diferenciável e $x = g(r, s)$ e $y = h(r, s)$ são funções diferenciáveis de r e s, então w será uma função diferenciável de r e s e*

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Exemplo 8.3. *Seja $w = x^2 + y^2$ e $x = r - s$, $y = r + s$. Aplicando a regra da cadeia,* *segue que*

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= 2x(1) + 2y(1)\\ &= 2(r-s) + 2(r+s)\\ &= 4r,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= 2x(-1) + 2y(1)\\ &= -2(r-s) + 2(r+s)\\ &= 4s.\end{aligned}$$

Proposição 8.4 (Regra da cadeia - Caso 4)**.** *Se $w = f(x,y,z)$ é uma função diferenciável e $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$ e $z = k(r,s)$ são funções diferenciáveis de r e s, então w será uma função diferenciável de r e s e*

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Exemplo 8.4. *Seja $w = x + 2y + z^2$ e $x = \dfrac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$ e $z = 2r$. Aplicando a regra da cadeia, segue que*

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &= 1\left(\tfrac{1}{s}\right) + 2(2r) + 2z(2)\\ &= \tfrac{1}{s} + 4r + 4r(2)\\ &= \tfrac{1}{s} + 12r.\end{aligned}$$

Analogamente, obtêm-se $\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

Proposição 8.5 (Regra da cadeia - Caso geral)**.** *Se w é uma função diferenciável de n variáveis $x_1, ..., x_n$ e cada uma dessas variáveis por sua vez seja uma função diferenciável de m variáveis $y_1, ..., y_m$. Então, w será uma função diferenciável de $y_1, ..., y_m$ e*

$$\frac{\partial w}{\partial y_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + ... + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y_2} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + ... + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial y_m} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_m} + ... + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_m}.$$

8.1.1 Aplicações da Regra da Cadeia

A. Equação da onda.

A equação da onda descreve a propagação das ondas tais como ocorrem na física, como ondas sonoras, luminosas ou aquáticas. Ela surge em áreas como a acústica, eletromagnetismo, e dinâmica dos fluidos. Historicamente, o chamado problema da corda vibrante, como as de um instrumento musical, foi estudado por Jean le Rond d'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, e Joseph-Louis Lagrange. Seja a função $u = u(x,t)$ de classe C^2. A equação homogênea da onda é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Essa equação modela as pequenas vibrações transversais de um fio fino e flexível. A função $u = u(x,t)$ representa a deflexão da corda no ponto $x \in \mathbb{R}$ e no instante t. A solução dessa equação é dada por

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct),$$

em que f e g são funções de uma variável real a valores reais duas vezes diferenciáveis. De fato, pela Regra da Cadeia tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+ct) + g''(x-ct)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(f''(x+ct) + g''(x-ct)\right).$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

B. Taxa de variação de um ângulo agudo no triângulo retângulo.

Num dado instante, o comprimento de um cateto de um triângulo é 10 cm e ele está crescendo a uma taxa de 1 cm/min e o comprimento do outro cateto é 12 cm o qual está decrescendo a uma taxa de 2 cm/min. O objetivo é calcular a taxa de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de 12 cm de comprimento, num dado instante. Denotando por θ a medida do ângulo agudo oposto ao cateto de lado 12, tem-se que

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = yx^{-1} \Longleftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}(-yx^{-2})(1) + \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}(2) \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{12^2}{10^2}}(-12\times 10^{-2})(1) + \frac{1}{1+\dfrac{12^2}{10^2}}\frac{1}{10}(2) \\
&= \left(\frac{10^2}{12^2+10^2}\right)\left(-\frac{32}{100}\right) \\
&= -\frac{8}{61}.
\end{aligned}$$

Portanto, taxa de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de $12cm$ de comprimento, num dado instante é de $-8/61$ rd/min.

C. Coordenadas polares.

Seja f uma função diferenciável de x e de y e $u = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Pela Regra da Cadeia, têm-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta).$$

Definição 8.1 (Coordenadas Polares)**.** *Dado um ponto $P = (x,y)$ do plano, o par (r,θ) recebe o nome de coordenadas polares do ponto P. A medida r representa a distância do ponto a origem e θ é a medida do ângulo formado entre a semi-reta OP e o eixo x. A Figura 8.1 mostra a representação geométrica das coordenadas polares do ponto P.*

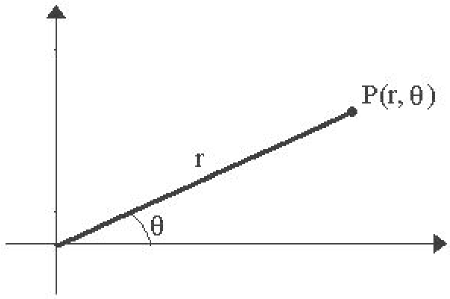

Figura 8.1: Representação geométrica das coordenadas polares do ponto (x, y).

D. Demanda do consumidor.

Um revendedor de bicicletas descobriu que, se bicicletas de 10 marchas forem vendidas por x reais cada, e o preço da gasolina for de y centavos por litro, aproximadamente

$$f(x, y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4\,(0,1y + 5)^{\frac{3}{2}}\,,$$

bicicletas serão vendidas por mês. Estima-se que daqui a t meses as bicicletas estarão sendo vendidas por $x = 129 + 5t$ reais cada e o preço da gasolina será de $y = 80 + 10\sqrt{3t}$ centavos por litro. A taxa de variação da demanda mensal de bicicletas em relação ao tempo é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= -24\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(5) + 4\frac{3}{2}\,(0,1y + 5)^{\frac{1}{2}}\,0,1\left(10\frac{1}{2}(3t)^{-\frac{1}{2}}3\right) \\
&= -\frac{60}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{3t}}\,(0,1y + 5)^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{60}{\sqrt{129 + 5t}} + \frac{9}{\sqrt{3t}}\left[0,1\left(80 + 10\sqrt{3t}\right) + 5\right].
\end{aligned}$$

Em particular, a taxa de variação da demanda mensal de bicicletas em relação ao tempo daqui a 3 meses será

$$\frac{df}{dt} = -\frac{60}{\sqrt{129 + 15}} + \frac{9}{\sqrt{9}}\,[0,1\,(80 + 30) + 5] = 7.$$

8.2 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 8.1. *Utilize a regra da cadeia para encontrar* $\dfrac{dw}{dt}$.

a) $w = x^3 + y^4$, $x = t^2$ *e* $y = \cos t$.

b) $w = \tan xy$, $x = t$ *e* $y = t^3$.

c) $w = e^{-x^2-y^2}$, $x = t$ *e* $y = \sqrt{t}$.

d) $w = \sin(xyz)$, $x = t$, $y = t^2$ *e* $z = t^3$.

Exercício 8.2. *Utilize a regra da cadeia para encontrar* $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ *e* $\dfrac{\partial w}{\partial t}$.

a) $w = x^2 + y^2 + z$, $x = s - t$ *e* $y = s + t$ *e* $z = 2e^{st}$.

b) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = s - t$ *e* $y = s + t$ *e* $z = 2\sqrt{st}$.

c) $w = \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}$, $u = 3e^t \sin s$, $v = 3e^t \cos s$ *e* $z = 4e^t$.

d) $w = e^{xyz}$, $x = st$, $y = s^2 + t$ *e* $z = s - t$.

Exercício 8.3. *Considere* $w = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\sin\theta$. *Mostre que*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Exercício 8.4. *Escreva uma fórmula para a regra da cadeia para cada derivada a seguir.*

a) $\dfrac{dz}{dt}$ *para* $z = f(x, y)$, $x = g(t)$ *e* $y = h(t)$.

b) $\dfrac{dz}{dt}$ *para* $z = f(u, v, w)$, $u = g(t)$, $v = h(t)$ *e* $w = k(t)$.

c) $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ *e* $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ *para* $w = h(x, y, z)$, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ *e* $z = k(u, v)$. *d)* $\dfrac{\partial w}{\partial p}$, $w = f(x, y, z, v)$, $x = g(p, q)$, $y = h(p, q)$, $z = j(p, q)$ *e* $v = k(p, q)$.

Capítulo 9

Teorema da Função Implícita

A ideia do Teorema da Função Implícita apareceu nos escritos de Isaac Newton (1642-1727) e nos trabalhos de Gottfried Leibniz (1643-1716) citando uma extensão da diferenciação implícita. Mas foi Augustian Luis Cauchy (1789-1857) que formalizou os resultados da época de Newton e Leibniz. Tal teorema estabelece condições suficientes para que uma equação defina (localmente) pelo menos uma função.

9.1 Funções Definidas Implicitamente

Definição 9.1. *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Para $c \in \mathbb{R}$ fixado, diz-se que a equação*

$$f(x, y) = c$$

define y implicitamente como função de x, quando existe uma função $\xi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida em algum intervalo I da reta tal que

$$f(x, \xi(x)) = c,$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 9.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 + y$ e $c \in \mathbb{R}$. A equação $f(x, y) = 0$ define implicitamente a função $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\xi(x) = c + x^3$. De fato,*

$$f(x, \xi(x)) = c,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Aqui, é fácil ver que para qualquer que seja o valor de $c \in \mathbb{R}$, a equação $f(x, y) = c$ irá definir implicitamente uma função $\xi(x)$. Na Figura 9.1, é ilustrado o comportamento geométrico de f quando $c = 0$.

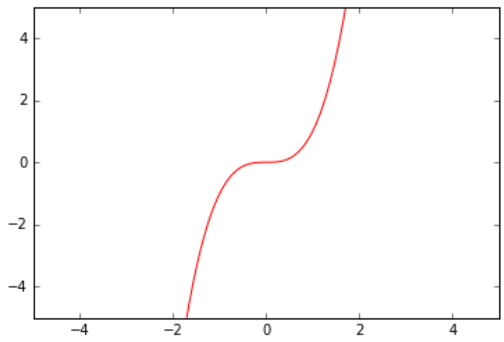

Figura 9.1: Gráfico da equação $f(x, y) = x^3$.

Na maioria dos casos, uma equação do tipo $f(x, y) = c$ define y implicitamente como função de x apenas localmente. O próximo exemplo explica melhor essa última frase.

Exemplo 9.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. A equação $x^2 + y^2 = 1$ não define y implicitamente como função de x; pois, por exemplo, para cada $x \in (-1, 1)$, existem dois valores de y satisfazendo a equação $x^2 + y^2 = 1$. Por outro lado, restringindo o domínio de f para o conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$, a equação $f(x, y) = 1$ ou equivalentemente $x^2 + y^2 = 1$, define implicitamente a função $\xi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\xi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Geometricamente, a equação $x^2 + y^2 = 1$ representa uma circunferência de centro na origem e raio 1, como ilustradada na Figura 9.2*

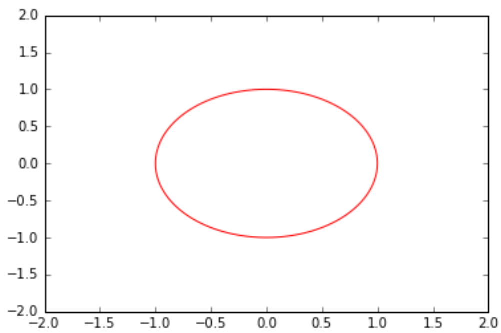

Figura 9.2: Circunferência de centro na origem e raio 1.

Exemplo 9.3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = 9y^2 - x(x - 3)^2$. A equação $9y^2 - x(x - 3)^2 = 0$ define uma curva no plano conhecida como Cúbica de Tschirnhaus. Esta equação define implicitamente a função $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\xi(x) = \frac{\sqrt{x(x-3)^2}}{3}$; pois,*

$$f(x, \xi(x)) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A cúbica de Tschirnhaus é mostrada na Figura 9.3

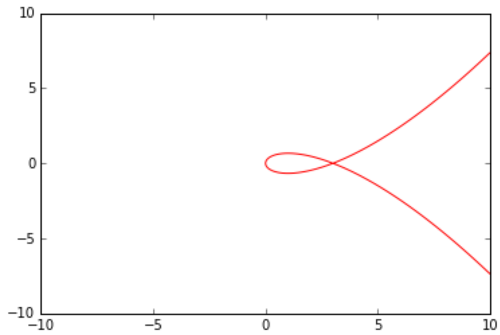

Figura 9.3: A cúbica de Tschirnhaus.

Definição 9.2. *Para funções de n variáveis, denota-se por (x, y) um ponto do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, ou seja, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Para $c \in \mathbb{R}$ fixado, diz-se que a equação*

$$f(x, y) = c$$

define y implicitamente como função de x, quando existe uma função $\xi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ expressa em algum conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, tal que

$$f(x, \xi(x)) = c,$$

para todo $x \in A$.

9.2 O Teorema da Função Implícita

O teorema da função implícita apresenta uma condição suficiente para garantir que a equação $f(x, y) = c$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}$ defina (localmente) y implicitamente como função de x. Na sequencia, apresenta-se esse Teorema.

Teorema 9.1 (Teorema da Função Implícita em $\mathbb{R}^2$)**.** *Considere a função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k, $k \geq 1$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a_1, a_2) \in U$, tal que $f(a_1, a_2) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \neq 0$. Existem uma bola $B((a_1, a_2), \delta) \subset \mathbb{R}^2$ e um intervalo $J = (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:*

1. *$B((a_1, a_2), \delta) \times J \subset U$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B((a_1, a_2), \delta) \times \overline{J}$;*

2. *Para todo $(x, y) \in B((a_1, a_2), \delta)$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$.*

A função $\xi : B((a_1, a_2), \delta) \longrightarrow J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $(x, y) \in B((a_1, a_2), \delta)$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \xi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

Esse teorema costuma ser demonstrado nos cursos de Análise ao lado da apresentação do chamado Teorema da Função Inversa. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Lima (1989).

Exemplo 9.4. *Considere a equação $y^3 + xy + x^3 = 4$. Observe que para $x = 0$, $y = \sqrt[3]{4}$, ou seja, fazendo $f(x, y) = y^3 + xy + x^3$, tem-se que $f(0, \sqrt[3]{4}) = 4$. Por outro lado, $f \in C^1$ em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, \sqrt[3]{4}) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, a equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente, pelo menos uma função $y = \xi(x) \in C^1$ num aberto contendo 0. Além disso,*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}.$$

É importante lembrar que o teorema da função implícita estabelece apenas condições suficientes para a existência de uma função definida implicitamente na vizinhança de um ponto. Por exemplo, seja $f(x, y) = x^5 - y^5$, segue que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ e, no entanto, a equação $f(x, y) = 0$ define trivialmente a função $f(x) = x$ em torno da origem.

Teorema 9.2 (Teorema da Função Implícita em $\mathbb{R}^3$)**.** *Dada a função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k, $k \geq 1$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Seja $(a_1, a_2, a_3) \in U$, tal que $f(a_1, a_2, a_3) = c$ e*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) \neq 0.$$

Existem uma bola $B((a_1, a_2, a_3), \delta) \subset \mathbb{R}^3$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:

1. *$B((a_1, a_2, a_3), \delta) \times J \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in B((a_1, a_2, a_3), \delta) \times \overline{J}$;*

2. *Para todo $(x, y, z) \in B((a_1, a_2, a_3), \delta)$ existe um único $z = \xi(x, y) \in J$ tal que $f(x, y, z) = f(x, y, \xi(x, y)) = c$.*

A função $\xi : B((a_1, a_2, a_3), \delta) \longrightarrow J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas *parciais em cada ponto* $(x,y,z) \in B((a_1,a_2,a_3),\delta)$ *são dadas por*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,\xi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y\xi(x,y))}.$$

Exemplo 9.5. *Considere a equação* $e^{x+y+z} + xyz = 1$. *Considerando* $f(x,y,z) = e^{x+y+z} + xyz$, *tem-se que* $f(0,0,0) = 1$. *Por outro lado,* $f \in C^1$ *e* $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$. *Pelo Teorema da Função Implícita, a equação* $e^{x+y+z} + xyz = 1$ *define implicitamente, pelo menos uma função* $z = \xi(x,y)$ *num aberto de* $\mathbb{R}^2$ *contendo* $(0,0)$. *Além disso,*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+y+z} + yz}{e^{x+y+z} + xz}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}.$$

Exemplo 9.6. *Considere a equação* $zx^2 + y^2 - yz^3 = 6$. *Definindo* $f(x,y,z) = zx^2 + y^2 - yz^3$, *tem-se que* $f(1,0,6) = 6$. *Por outro lado,* $f \in C^1$ *e* $\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,6) \neq 0$. *Pelo Teorema da Função Implícita, a equação* $zx^2 + y^2 - yz^3 = 6$ *define implicitamente, pelo menos uma função* $z = \xi(x,y)$ *num aberto de* $\mathbb{R}^2$ *contendo* $(1,0)$. *Além disso,*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz}{x^2 - 3yz^2}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - z^3}{x^2 - 3yz^2}.$$

Teorema 9.3 (Teorema da Função Implícita em $\mathbb{R}^{n+1}$). *Dada a função* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *de classe* C^k, $k \geq 1$ *no aberto* $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Seja* $(a,b) \in U$, *tal que* $f(a,b) = c$ *e*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

Existem uma bola $B(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ *e um intervalo* $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ *com as seguintes propriedades:*

1. $B(a,\delta) \times J \subset U$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ *para todo* $(x,y) \in B(a,\delta) \times \overline{J}$;

2. *Para todo* $(x,y) \in B(a,\delta)$ *existe um único* $y = \xi(x) \in J$ *tal que* $f(x,y) = f(x,\xi(x)) = c$.

A função $\xi : B(a,\delta) \longrightarrow J$, *assim definida, é de classe* C^k *e suas derivadas parciais em* *cada ponto* $x \in B(a, \delta)$ *são dadas por*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

9.3 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 9.1. *A equação* $y^3 + xy + x^3 - 4 = 0$ *define implicitamente alguma função diferenciável* $y = y(x)$*? Em caso afirmativo, expresse* $\dfrac{dy}{dx}$ *em termos de* x *e* y*.*

Exercício 9.2. *Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável* $y = y(x)$*.*

a) $x^2 y + \sin y = x$.
b) $y^4 + x^2 y^2 + x^4 = 3$.
c) $y^3 + xy + x^3 - 3 = 0$.
d) $x^2 + y^2 = 6$.

Exercício 9.3. *Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável* $z = z(x, y)$*. Expresse* $(\partial z/\partial x)$ *e* $(\partial z/\partial y)$ *em termos de* x*,* y *e* z*.*

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
b) $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 5$.
c) $e^{x+y+z} + x^2 yz = 1$.
d) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$.

Capítulo 10

Gradiente e Derivada Direcional

As derivadas parciais de uma função de duas variáveis representam taxas de variação na direção do eixo x e na direção do eixo y. Neste capítulo, apresenta-se um conceito de derivada que representa uma taxa de variação numa direção qualquer. Para isso, é necessário introduzir um personagem novo na história, chamado de vetor gradiente.

10.1 Vetor Gradiente

Definição 10.1 (Vetor Gradiente)**.** *Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais a valores reais que admite derivadas parciais de primeira ordem no ponto (a_1, a_2) de seu domínio. O vetor*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\right),$$

denotado por $\nabla f(a_1, a_2)$ ou por $\mathrm{grad} f(a_1, a_2)$, denomina-se vetor gradiente da função f no ponto (a_1, a_2).

Do ponto de vista geométrico, o vetor gradiente de f no ponto (a_1, a_2) é um vetor aplicado no ponto (a_1, a_2).

Exemplo 10.1. *Seja $f(x, y) = x^3 + 2y^2$. O vetor gradiente da função f num ponto (x, y) de seu domínio é dado por*

$$\nabla f(x, y) = (3x^2, 4y).$$

Em particular,

$$\nabla f(1, 1) = (3, 4)$$

Assim, o vetor $(3, 4)$ será um vetor aplicado (com a origem) no ponto $(1, 1)$.

Exemplo 10.2. *Seja $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. O vetor gradiente da função f, num ponto (x, y)*

de seu domínio, é dado por

$$\nabla f(x,y) = (2xe^{x^2-y^2}, -2ye^{x^2-y^2}).$$

Em particular,

$$\nabla f(1,1) = (2,-2).$$

Definição 10.2 (Campo Gradiente)**.** *Se $f(x,y)$ admite derivadas parciais de primeira ordem em todos os pontos de seu domínio; então, para cada ponto $(x,y) \in Domf$ está associado o vetor $\nabla f(x,y)$. Esta aplicação é chamada de campo gradiente. A Figura 10.1 ilustra o campo gradiente da função $f(x,y) = x^2 + y^2$.*

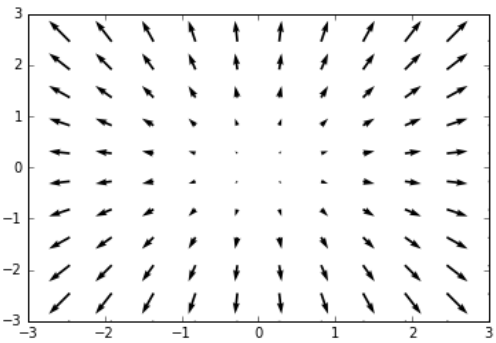

Figura 10.1: Campo gradiente da função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Uma questão que merece atenção é justificar o fato de que a derivada de uma função de duas variáveis reais a valores reais, num dado ponto de seu domínio, é dada pelo vetor gradiente nesse ponto. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto (a_1,a_2). Então,

$$f(x,y) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2) + E(x,y),$$

em que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)-(a_1,a_2)\|} = 0.$$

Tendo em vista a definição de vetor gradiente, pode-se escrever

$$f(x,y) = f(a_1,a_2) + \nabla f(a_1,a_2)\,[(x,y)-(a_1,a_2)] + E(x,y),$$

em que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y)-(a_1,a_2)\|} = 0.$$

Fazendo $X = (x, y)$ e $X_0 = (a_1, a_2)$, tem-se que

$$f(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0)(X - X_0) + E(X),$$

em que

$$\lim_{X \to X_0} \frac{E(X)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Sabe-se do Cálculo de funções de uma variável, que se $f(x)$ for uma função diferenciável no ponto a_1, então

$$f(x) = f(a_1) + f^{'}(a_1)(x - a_1) + E(x),$$

com

$$\lim_{x \to a_1} \frac{E(X)}{\mid x - a_1 \mid} = 0.$$

Dessa forma, parece bem natural definir a derivada de $f(x, y)$ no ponto (a_1, a_2) pelo vetor gradiente de f em (a_1, a_2).

Pode-se estender a definição de vetor gradiente a dimensões superiores a dois.

Definição 10.3 (Vetor gradiente para uma função de n variáveis)**.** *Seja f uma função de n variáveis reais a valores reais, que admite derivadas parciais de primeira ordem no ponto $(a_1, ..., a_n)$ de seu domínio. O vetor*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, ..., a_n), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, ..., a_n) \right),$$

denotado por $\nabla f(a_1, ..., a_n)$ ou por $gradf(a_1, ..., a_n)$, denomina-se vetor gradiente da função f no ponto $(a_1, ..., a_n)$.

O vetor gradiente de uma função está relacionado com suas curvas de nível, como vê-se a seguir.

Teorema 10.1. *Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^1 numa vizinhança do ponto $P = (a_1, a_2)$, tal que $\nabla f(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Então, $\nabla f(a_1, a_2)$ é perpendicular á curva de nível de f que passa pelo ponto P.*

Demonstração. Como $\nabla f(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, a curva de nível $f(x, y) = c$ que passa pelo ponto P pode ser parametrizada numa vizinhança de P com equações

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

em que $a_1 = x(0)$ e $a_2 = y(0)$, e com vetor tangente não nulo. Derivando $z = f(x(t), y(t)) = c$ em relação a t, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{d}{dt}x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}c = 0.$$

Em $t = 0$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\frac{d}{dt}x(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\frac{d}{dt}y(0) = 0.$$

Assim,

$$\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\right), \left(\frac{d}{dt}x(0), \frac{d}{dt}y(0)\right) \right\rangle = 0.$$

Desse modo, isso mostra que o gradiente de f é perpendicular ao vetor tangente em P e, portanto, perpendicular a curva de nível $f(x, y) = c$.

10.2 Derivada Direcional

Definição 10.4 (Derivada Direcional)**.** *Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis reais a valores reais, (a_1, a_2) um ponto de seu domínio e $u = (a, b)$ um vetor unitário. Admita-se que exista $r > 0$, tal que os pontos da reta $(x, y) = (a_1 + at, a_2 + bt)$, $\mid t \mid < r$ pertençam ao domínio da função f. A taxa de variação média de f, na direção do vetor $u = (a, b)$, entre os pontos (a_1, a_2) e $(a_1 + at, a_2 + bt)$ é definida por*

$$\frac{f(a_1 + at, a_2 + bt) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

O limite

$$D_u f(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + at, a_2 + bt) - f(a_1, a_2)}{t}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada direcional da função f no ponto (a_1, a_2) e na direção do vetor $u = (a, b)$, com u unitário.

As derivadas parciais da função f, são particulares derivadas direcionais. De fato,

$$D_i f(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$$

e

$$D_j f(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2).$$

Desse modo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ são, respectivamente, as derivadas direcionais da função f no ponto (a_1, a_2), e nas direções dos vetores canônicos $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$.

Definição 10.5 (Derivada Direcional para função de n variáveis)**.** *De um modo geral, sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis reais a valores reais, em que A é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)$ um ponto do conjunto A e $u = (u_1, ..., u_n)$ um vetor de $\mathbb{R}^n$. O limite*

$$D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.u) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, ..., a_n + tu_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t},$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada direcional da função f no ponto a e na direção do vetor u.

Um fato curioso, é que na definição anterior, o vetor u não foi considerado unitário, ou seja, admite-se que u seja um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Essa definição contraria a maioria dos livros de Cálculo. O que ocorre é que, quando considera-se que o vetor u não é unitário, a derivada direcional de f na direção de u dependerá linearmente de u. De fato, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, então existe $D_{\alpha.u} f(a)$, $a \in A$ se, e somente se, existe $D_u f(a)$ e, no caso afirmativo, tem-se que

$$D_{\alpha.u} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\alpha.u) - f(a)}{t} = \alpha \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\alpha.u) - f(a)}{t\alpha} = \alpha D_u f(a).$$

Resumindo, pode-se definir a derivada direcional utilizando um vetor não unitário. A escolha feita neste texto e na maioria dos livros de Cálculo, em trabalhar com o vetor u unitário, simplifica a parte operacional envolvida.

Exemplo 10.3. *Seja $f(x, y) = 2x + y^2$. Para se obter a derivada da função f, no ponto $(1, 1)$ e na direção do vetor $u = (-1, 1)$, calcula-se $D_u f(1, 1)$, em que u é um vetor unitário qualquer. Segue:*

$$\begin{aligned}
D_u f(1,1) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + at, 1 + bt) - f(1, 1)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{2(1 + at) + (1 + bt)^2 - 3}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{2a + 2at + 1 + 2bt + b^2t^2 - 3}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{2a + 2b + b^2 t}{t} \\
&= 2a + 2b.
\end{aligned}$$

O próximo passo consiste em encontrar um vetor que tenha a mesma direção e o *mesmo sentido do vetor u, porém que seja unitário. Tal vetor é conhecido por versor do vetor u. O versor do vetor u é dado por*

$$(a,b) = \frac{1}{\|(-1,1)\|}.(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.(-1,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Portanto,

$$D_u f(1,1) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Exemplo 10.4. *Seja $f(x,y,z) = x + y + z^2$. Para se obter a derivada da função f no ponto $(1,0,1)$ e na direção do vetor $u = (1,1,2)$, calcula-se $D_u f(1,0,1)$, em que u é um vetor unitário qualquer. Segue:*

$$\begin{aligned} D_u f(1,0,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(1+at, bt, 1+ct) - f(1,0,1)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+at) + (bt) + (1+ct)^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1 + at + bt + 1 + 2ct + c^2t^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{at + bt + 2ct + c^2t^2}{t} \\ &= a + b + 2c. \end{aligned}$$

O próximo passo consiste em encontrar um vetor que tenha a mesma direção e o mesmo sentido do vetor u, porém que seja unitário. Tal vetor é conhecido por versor do vetor u. O versor do vetor u é dado por

$$(a,b,c) = \frac{1}{\|(1,1,2)\|}.(1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}.(1,1,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Portanto,

$$D_u f(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Na sequência, será apresentado na Proposição 10.1 uma maneira mais rápida e bem mais fácil de se calcular derivadas direcionais. Os próximos resultados são apresentados para o caso $n = 2$, mas podem ser facilmente estendidos para funções de n variáveis.

Proposição 10.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A um conjunto aberto, $(a_1, a_2) \in A$ e $u = (a,b)$ um vetor unitário. Se a função f for diferenciável no ponto (a_1,a_2), então f admitirá derivada direcional no ponto (a_1,a_2) e na direção do vetor $u = (a,b)$ e*

$$D_u f(a_1,a_2) = \langle \nabla f(a_1,a_2), u \rangle.$$

Demonstração. Considere a função auxiliar g, dada por $g(t) = f(a_1 + at, a_2 + bt)$. Como a função f é diferenciável no ponto (a_1, a_2), segue a diferenciabilidade da função g no ponto $t = 0$. Pela regra da cadeia,

$$g^{'}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)a + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)b = \langle \nabla f(a_1, a_2), (a, b) \rangle.$$

Como $g^{'}(0) = D_u f(a_1, a_2)$, resulta

$$D_u f(a_1, a_2) = \langle \nabla f(a_1, a_2), u \rangle.$$

Caso a função f não seja diferenciável no ponto (a_1, a_2), não será possível calcular a derivada direcional utilizando produto interno.

Exemplo 10.5. *Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Para se calcular $D_u f(1, 2)$, em que $u = (1, 3)$, obtêm-se, inicialmente, o vetor gradiente da função f no ponto $(1, 2)$, ou seja*

$$\nabla f(1, 2) = (2, 4).$$

O versor do vetor $u = (1, 3)$ é

$$\frac{1}{\|(1, 3)\|}.(1, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right).$$

Logo,

$$D_u f(1, 2) = \langle (2, 4), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \rangle = \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{14}{\sqrt{10}}.$$

Exemplo 10.6. *Seja $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Para se calcular $D_u f(1, 1)$, em que $u = (3, 4)$, obtêm-se, inicialmente, o vetor gradiente da função f no ponto $(1, 1)$, ou seja*

$$\nabla f(x, y) = (2xe^{x^2 - y^2}, -ye^{x^2 - y^2}).$$

Em particular,

$$\nabla f(1, 1) = (2, -2).$$

O versor do vetor $u = (3, 4)$ é

$$\frac{1}{\|(3, 4)\|}.(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

Logo,

$$D_u f(1,1) = \langle (2,-2), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \rangle = \frac{6}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Proposição 10.2. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, A um conjunto aberto, f diferenciável no ponto (a_1, a_2) e tal que $\nabla f(a_1, a_2) \neq (0,0)$. Então, o valor máximo de $D_u f(a_1, a_2)$ ocorre quando*

$$u = \frac{\nabla f(a_1, a_2)}{\|\nabla f(a_1, a_2)\|}$$

e o valor máximo de $D_u f(a_1, a_2)$ é dado por

$$\textit{Máx } D_u f(a_1, a_2) = \|\nabla f(a_1, a_2)\|.$$

Demonstração. Seja θ o ângulo formado entre os vetores $\nabla f(a_1, a_2)$ e u. Então,

$$D_u f(a_1, a_2) = \langle \nabla f(a_1, a_2), u \rangle = \|\nabla f(a_1, a_2)\| \cos\theta$$

Com isso, $D_u f(a_1, a_2)$ terá seu valor máximo quando $\theta = 0$, ou seja, quando u for o versor do vetor $\nabla f(a_1, a_2)$. O valor máximo de $D_u f(a_1, a_2)$ é então $\|\nabla f(a_1, a_2)\|$.

Em outras palavras, a Proposição 10.2 diz que, estando no ponto (a_1, a_2), a direção e o sentido que se deve tomar para que a função f cresça mais rapidamente é a do vetor $\nabla f(a_1, a_2)$.

Exemplo 10.7. *Admita que a temperatura, em graus Celsius, em cada ponto de uma placa de metal seja dada por*

$$T(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x,$$

em que x e y são medidos em centímetros. A direção na qual a temperatura cresce mais rapidamente a partir do ponto $(0,0)$ é dada por

$$\nabla T(0,0) = (1,1)$$

e a taxa máxima de crescimento é $\|\nabla T(0,0)\| = \sqrt{2}\,^o$C/cm. Por outro lado, a direção na qual a temperatura decresce mais rapidamente no ponto $(0,0)$ é dada por

$$-\nabla T(0,0) = (-1,-1).$$

Exemplo 10.8. *Suponha que a equação da superfície de uma montanha seja dada por*

$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, em que as distâncias são medidas em metros. Considerando que os pontos do eixo positivo dos x estão a leste e os pontos do eixo positivo dos y estão a norte e que um alpinista está localizado no ponto $(-10, 5, 580)$, a direção mais acentuada desse alpinista é dada pelo vetor gradiente de z no ponto $(-10, 5)$, ou seja,

$$\nabla z(x, y) = (-6x, -4y).$$

Em particular,

$$\nabla z(-10, 5) = (60, -20) = 20\,(3, -1).$$

Na Figura 10.2, é ilustrado o gráfico da função $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$.

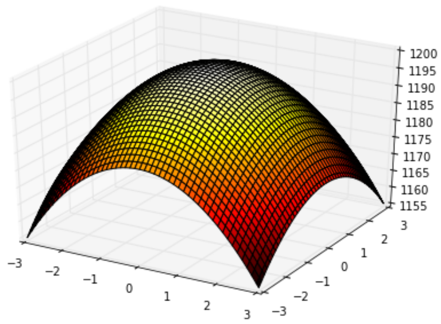

Figura 10.2: Gráfico da função $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$.

10.3 Atividades Complementares - Pós aula

Exercício 10.1. *Determine o gradiente de cada função no ponto indicado.*
a) $f(x, y) = x^2 + y^3$, $\quad (1, -2)$.
b) $f(x, y) = 2e^{x-y} + 4xy$, $\quad (1, 0)$.
c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $\quad (1, 1)$.
d) $f(x, y, z) = x^2 + 2x^2y^3 + z^5$, $\quad (1, 0, 0)$.

Exercício 10.2. *Utilize a definição para calcular a derivada da função $f(x, y) = 2x^2 + y$ no ponto $(1, 1)$ e na direção do vetor $(1, 3)$.*

Exercício 10.3. *Calcule a derivada direcional $D_u f(a_1, a_2)$, sendo:*
a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $(a_1, a_2) = (1, 2)$ *e* $u = (2, 1)$.
b) $f(x, y) = xy$, $(a_1, a_2) = (1, 1)$ *e* $u = (1, 1)$.
c) $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$, $(a_1, a_2) = (1, 2)$ *e* $u = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$.
d) $f(x, y) = x^2e^y$, $(a_1, a_2) = (2, 0)$ *e* $u = i + j$.
e) $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$, $(a_1, a_2) = (-1, -4)$ *e* $u = i + 3j$.

Exercício 10.4. *Seja f uma função de duas variáveis reais a valores reais. Descreva qual o procedimento que você usaria para encontrar a direção em que a função f tem a maior taxa de variação.*

Exercício 10.5. *Para cada uma das funções descritas no exercício* (1)*, determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção que isso ocorre.*

Exercício 10.6. *Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em ^{o}C. Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dá um passeio.*
a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto (3,2).
b) De quanto a temperatura se elevará, aproximadamente, caso desloque-se e 0,01 km na direção de maior crescimento da temperatura?

Exercício 10.7. *A temperatura em um ponto (x, y) é dada por*

$$T(x, y) = 5(x^2 + 3y^2),$$

em que T é dado é medido em graus Célsius e (x, y) em metros. Suponha que você esteja no ponto $P(1, 1)$ e deseja transportar uma determinada mercadoria que deve ser mantida a 20 graus Célsius. A cada um grau de variação na temperatura, o custo total de produção do produto aumenta em R$ 0,05 reais. Para chegar ao seu destino, na direção do vetor $b = (0, 2)$, você deve percorrer 50 km. Por outro lado, se você utiliza a direção do vetor gradiente deve-se percorrer apenas 30 km. Nessas condições, responda:
a) Em qual das rotas a mercadoria terá o menor variação no custo de produção?
b) Qual o valor da variação do custo em cada rota?

Exercício 10.8. *Seja*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \textit{se}(x, y) \neq (0, 0), \\ 0 \quad , & \textit{se}(x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

*a) Demonstre que $D_u f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot$ **u**, $u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.*
b) Explique o resultado acima.

Exercício 10.9. *Se $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, determine o vetor gradiente $\nabla f(2, 1)$ e use para determinar a reta tangente à curva de nível da função $f(x, y) = 8$ no ponto $(2, 1)$. Esboce as curvas de nível, reta tangente e vetor gradiente.*

Capítulo 11

Otimização de Funções de Várias Variáveis

Um problema de otimização é aquele em que se procura determinar os valores extremos de uma função, isto é, o maior ou o menor valor que uma função pode assumir em um dado conjunto. Problemas de otimização são comuns em diversas áreas do conhecimento e surgem, por exemplo, ao determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica; o ponto da órbita de um cometa mais próximo da Terra; a velocidade mínima necessária para que um foguete escape da atração gravitacional da Terra, etc. Neste capítulo, estuda-se otimização de funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais.

11.1 Extremos Locais

Definição 11.1 (Ponto de mínimo local)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais. O ponto $(a_1, a_2) \in A$ é um ponto de mínimo local de f, se existe um número real $\delta > 0$, tal que, se*

$$\|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta,$$

então $(x, y) \in A$ e

$$f(a_1, a_2) \leq f(x, y).$$

Em outras palavras, a Definição 11.1 conta-nos que deve existir uma vizinhança em torno do ponto (a_1, a_2), em que a função está definida e, nesta vizinhança, o valor da função em (a_1, a_2) é o menor que ela atinge. Analogamente, defini-se ponto de máximo local.

Definição 11.2 (Ponto de máximo local)**.** *O ponto* $(a_1, a_2) \in A$ *é um ponto de máximo local de* f *se existe um número real* $\delta > 0$*, tal que, se*

$$\|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta,$$

então $(x, y) \in A$ *e*

$$f(a_1, a_2) \geq f(x, y).$$

Definição 11.3 (Extremo local e Valor extremo)**.** *Em ambos os casos descritos nas Definições 11.1 e 11.2, o ponto* (a_1, a_2) *é chamado de extremo local ou relativo de* f *e a quantidade* $f(a_1, a_2)$ *é chamada de valor extremo de* f*.*

Exemplo 11.1. *Se* $f(x, y) = x^2 + y^2$*, então* $(0, 0)$ *é um ponto de mínimo local de* f*. De fato, dada a bola* $B((0, 0), 2)$*, tem-se*

$$0 = f(0, 0) \leq f(x, y) = x^2 + y^2$$

para qualquer que seja $(x, y) \in B((0, 0), 2)$ *e o valor mínimo de* f *é* 0*, que é atingido na origem. Na Figura 11.1, é mostrado o gráfico da função* $f(x, y)$ *e seu ponto de mínimo.*

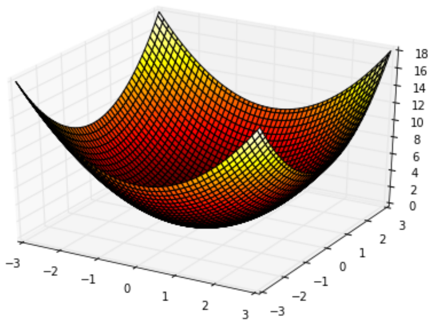

Figura 11.1: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

As Definições 11.1 e 11.2 estendem-se de maneira natural para funções de n variáveis.

Definição 11.4 (Extremos para função de n variáveis)**.** *Seja agora* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto,* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de* n *variáveis reais a valores reais. O ponto* $a = (a_1, ..., a_n) \in A$ *é um ponto de mínimo local de* f*, se existe um número real* $\delta > 0$*, tal que, se*

$$\|x - a\| < \delta,$$

então $x = (x_1, ..., x_n) \in A$ *e*

$$f(a) \leq f(x).$$

Por outro lado, o ponto $a = (a_1, ..., a_n) \in A$ *é um ponto de máximo local de* f*, se existe um número real* $\delta > 0$*, tal que, se*

$$\|x - a\| < \delta,$$

então $x = (x_1, ..., x_n) \in A$ *e*

$$f(a) \geq f(x).$$

Uma questão importante é que qualquer problema que envolva a minimização de uma função de n variáveis, pode ser considerado como um problema de maximização. Minimizar a função $f(x)$ é o mesmo que maximizar $(-f)(x)$, definida como $-f(x)$ para qualquer x que esteja no domínio da função f.

Proposição 11.1. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável, definida no aberto* A*, e* (a_1, a_2) *um extremo local de* f*. Então,*

$$\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0).$$

Demonstração. Suponha que (a_1, a_2) seja um ponto de máximo da função f. Para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, a função real $h(t) := f((a_1, a_2) + t(v_1, v_2))$ admite um ponto de máximo em $t = 0$. Assim, pela regra da cadeia tem-se:

$$0 = h^{'}(0) = \langle \nabla f(a_1, a_2), v \rangle$$

para todo v. Portanto, $\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$.

A proposição 11.1 pode ser estendida para uma função de n variáveis. Por outro lado, ela contínua válida com a hipótese de que (a_1, a_2) seja um ponto de mínimo local.

Definição 11.5 (Pontos crítico e de sela)**.** *Um ponto* (a_1, a_2)*, tal que* $\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$ *é denominado ponto crítico de* f *ou ponto estacionário de* f *e* $f(a_1, a_2)$ *é denominado valor crítico de* f*. Um ponto crítico que não é um extremo local é chamado de ponto de sela.*

Exemplo 11.2. *Os pontos críticos da função* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *são dados por*

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0).$$

Como o sistema só admite a solução trivial, segue que $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

Exemplo 11.3. *Os pontos críticos da função $f(x,y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ são os pares (x,y), tais que*

$$\begin{cases} 6 - 2x = 0, \\ -4 - 4y = 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Resolvendo o Sistema 11.1, encontra-se $x = 3$ e $y = -1$. Assim, o ponto $(3,-1)$ é o único ponto crítico de f.

Exemplo 11.4. *Os pontos críticos da função $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ são os pares (x,y), tais que*

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0, \\ 2y - 2 = 0. \end{cases} \tag{11.2}$$

Da primeira equação do Sistema 11.2, obtém-se $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Da segunda equação, conclui-se que $y = 1$. Logo, os pares $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(0,1)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$ são os pontos críticos da função f.

Definição 11.6 (Matriz Hessiana)**.** *Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. A matriz*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

denomina-se matriz Hessiana da função f no ponto (x,y). O determinante da matriz Hessiana de f no ponto (x,y) é denominado Hessiano e será denotado por $H(x,y)$. Para esse caso, o Hessiano de f no ponto (x,y) é dado por

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right]^2$$

Exemplo 11.5. *A matriz Hessiana da função $f(x,y) = x^3 + 2y^2$ em um ponto (x,y) é*

$$\begin{pmatrix} 6x & 0, \\ 4y & 0. \end{pmatrix}$$

Definição 11.7 (Matriz Hessiana para uma função de n variáveis)**.** *De um modo geral,* *seja a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. A matriz*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

denomina-se matriz Hessiana da função f no ponto x. O determinante da matriz Hessiana de f no ponto x é denominado Hessiano e será denotado por $H(x)$. A matriz Hessiana pode ser escrita de uma forma mais compacta,

$$(h_{ij}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right).$$

O Hessiano é utilizado para determinar a natureza dos pontos críticos da função f.

Proposição 11.2 (Teste do Hessiano)**.** *Sejam a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e (a_1, a_2) um ponto interior de A e também ponto crítico de f. Então,*

(i) Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) > 0$ e $H(a_1, a_2) > 0$, então o ponto (a_1, a_2) é um ponto de mínimo local de f;

(ii) Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) < 0$ e $H(a_1, a_2) > 0$, então o ponto (a_1, a_2) é um ponto de máximo local de f;

(iii) Se $H(a_1, a_2) < 0$, então o ponto (a_1, a_2) será um ponto de sela;

(iv) Se $H(a_1, a_2) = 0$, nada se pode afirmar.

Demonstração. A demonstração dessa proposição será omitida. O leitor interessado poderá consultá-la em Apostol (1981).

Exemplo 11.6. *Para a função $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$, tem-se que*

$$\nabla f(x, y) = (4x - y, 2y - x - 7).$$

Para obter os pontos críticos de f, basta fazer $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, ou seja,

$$\begin{cases} 4x - y = 0, \\ 2y - x - 7 = 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

A única solução do sistema 11.3 é o ponto $(1,4)$. *Para se conhecer a natureza desse ponto crítico, utiliza-se o teste do Hessiano (Proposição 11.2). As derivadas parciais de segunda ordem de* f*, calculadas no ponto* (x,y)*, são*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -1$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

O Hessiano no ponto (x,y) *é* $H(x,y) = 7$. *Com isso, tem-se que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 4 > 0$$

e $H(1,4) = 7 > 0$. *Logo, pelo teste do Hessiano, o ponto crítico* $(1,4)$ *é um ponto de mínimo local de* f. *Na Figura 11.2, é ilustrado o ponto crítico da função* f.

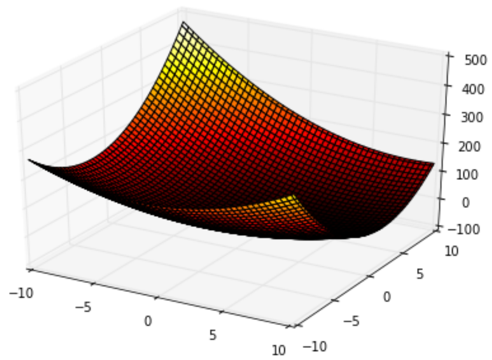

Figura 11.2: Gráfico da função $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.

Exemplo 11.7. *Para a função*

$$f(x,y) = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 4xy - y^2$$

tem-se que

$$\nabla f(x,y) = \left(-x^3 + 2x^2 + 4y, 4x - 2y\right).$$

Para obter os pontos críticos de f*, basta fazer* $\nabla f(x,y) = (0,0)$*, ou seja,*

$$\begin{cases} -x^3 + 2x^2 + 4y = 0, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases} \tag{11.4}$$

Resolvendo a segunda equação do Sistema 11.4, obtêm-se $y = 2x$. *Substituindo esse valor na primeira equação, segue que*

$$-x^3 + 2x^2 + 8x = -x(x^2 - 2x - 8) = -x(x-4)(x+2) = 0.$$

Logo, $x = 0$, $x = 4$ *e* $x = -2$. *Com isso, os pontos críticos da função* f *são* $(0,0)$, $(4,8)$ *e* $(-2,-4)$. *As derivadas parciais de segunda ordem da função* f, *calculadas no ponto* (x,y), *são dadas por*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -3x^2 + 4x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

O Hessiano de f, *no ponto* (x,y), *é dado por*

$$H(x,y) = 6x^2 - 8x - 16.$$

Na Tabela 11.2, é apresentada a natureza de cada ponto crítico encontrada anteriormente a partir do teste do Hessiano.

Tabela 11.1: Natureza do ponto crítico utilizando o teste Hessiano.

Ponto Crítico (x,y)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$H(x,y)$	Classificação
$(0,0)$	0	16	ponto de sela
$(4,8)$	-32	48	ponto de máximo local
$(-2,-4)$	-20	24	ponto de máximo local

A função $f(x,y) = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 4xy - y^2$ *é ilustrada na Figura 11.3.*

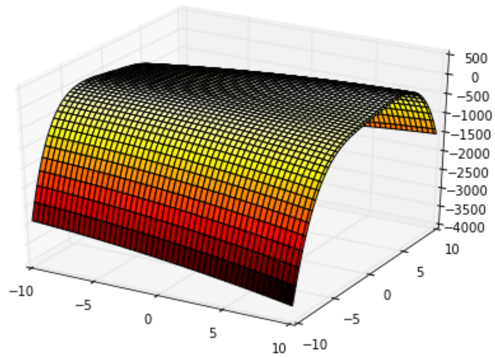

Figura 11.3: Gráfico da função $f(x, y) = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 4xy - y^2$.

Exemplo 11.8. *Considere a a função*

$$f(x, y) = -x\, y\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}},$$

a qual é ilustrada na Figura 11.4.

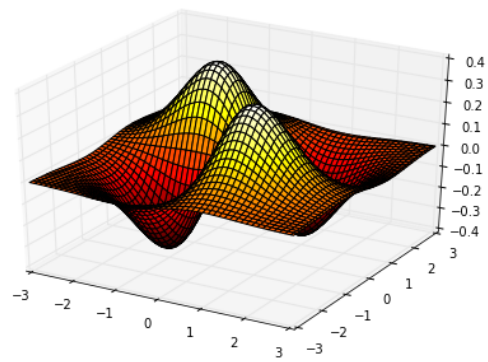

Figura 11.4: Gráfico da função $f(x, y) = -xye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$.

Note que

$$\nabla f(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \left(y[x^2 - 1], x[y^2 - 1] \right).$$

Para obter os pontos críticos de f, basta fazer $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, ou seja,

$$\begin{cases} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\, y\, (x^2 - 1) = 0, \\ e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\, x\, (y^2 - 1) = 0. \end{cases} \tag{11.5}$$

Como $e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \neq 0$*, obtêm-se um sistema equivalente ao descrito pela Eq. 11.5, o qual é*

$$\begin{cases} y\,(x^2-1)=0, \\ x\,(y^2-1)=0. \end{cases} \tag{11.6}$$

As soluções simultâneas para o sistema, dado pelas Eqs. 11.6, são

$$\begin{aligned} &x=0, y=0; \\ &x=1, y=\pm 1; \\ &x=-1, y=\pm 1. \end{aligned}$$

Logo, os pontos críticos de f *são* $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ *e* $(-1,-1)$*. As derivadas parciais de segunda ordem da função* f*, calculadas no ponto* (x,y)*, são dadas por*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = x\,y\,(3-x^2)\,e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\,y\,(3-y^2)\,e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\,y\,(3-y^2)\,e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (x^2-1)\,(1-y^2)\,e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}},$$

e o Hessiano de f *no ponto* (x,y) *é*

$$H(x,y) = x^2\,y^2\,(3-x^2)\,(3-y^2)\,e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} - (x^2-1)^2(1-y^2)^2\,e^{-(x^2+y^2)}.$$

Na Tabela 11.2, é apresentada a natureza de cada ponto crítico encontrado anteriormente a partir do teste do Hessiano.

Tabela 11.2: Natureza dos pontos críticos dada pelo teste Hessiano.

Ponto Crítico (x, y)	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$	$H(x, y)$	Classificação
$(0, 0)$	0	-1	Ponto de Sela
$(1, 1)$	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	Ponto de Mínimo
$(1, -1)$	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	Ponto de Máximo
$(-1, 1)$	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	Ponto de Máximo
$(-1, -1)$	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	Ponto de Mínimo

Exemplo 11.9. *Pretende-se construir uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo (ver Figura 11.5), com volume de $4\,m^3$ e utilizando a menor quantidade possível de material.*

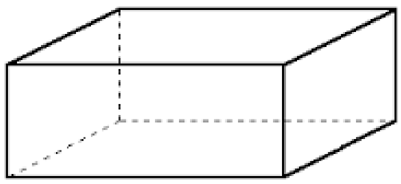

Figura 11.5: Caixa em forma de paralelepípedo retângulo.

Para isso, sejam x e y as medidas das arestas da base do paralelepípedo, dadas em metros, e z a medida de sua altura, também dada em metros. A área da superfície dessa caixa é dada por

$$A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

O objetivo aqui é minimizar a área levando em conta que $x\,y\,z = 4$, com $x, y, z > 0$. Substituindo $z = 4/xy$ na função A,

$$A(x, y) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}.$$

Os pontos críticos de A são dados por

$$\nabla A(x, y) = \left(y - \frac{8}{x^2}, x - \frac{8}{y^2} \right) = (0, 0),$$

ou seja, $x = y = 2$. Por outro lado,

$$H(x, y) = \frac{256}{x^3 y^3} - 1$$

e

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,y) = 8 - \frac{8}{x^2}.$$

Em particular,

$$H(2,2) = 3 > 0$$

e

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,y) = 2 > 0.$$

Assim, o ponto $(2,2)$ é um ponto de mínimo da função A. Portanto, as dimensões da caixa de volume $4\,m^3$, construída com a menor quantidade possível de material, são $x = 2$, $y = 2$ e $z = 1$.

11.2 Extremos Absolutos

Definição 11.8 (Mínimo e máximo absoluto de uma função de duas váriáveis)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(a_1, a_2) \in A$. O ponto (a_1, a_2) é um ponto de mínimo absoluto de f em A se*

$$f(a_1, a_2) \leq f(x,y),$$

para qualquer que seja $(x,y) \in A$. Por outro lado, o ponto (a_1, a_2) é um ponto de máximo absoluto de f em A, se

$$f(a_1, a_2) \geq f(x,y)$$

para qualquer que seja $(x,y) \in A$. Em ambos os casos, o ponto (a_1, a_2) é um extremo absoluto ou global de f e a quantidade $f(a_1, a_2)$ é chamada de valor extremo de f.

Exemplo 11.10. *Se $f(x,y) = x^2 + y^2$, então $(0,0)$ é um ponto de mínimo absoluto de f. De fato, para qualquer que seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se*

$$0 = f(0,0) \leq f(x,y) = x^2 + y^2,$$

e o valor mínimo de f é 0, que é atingido na origem, como pode ser notado na Figura 11.6, a qual ilustra o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

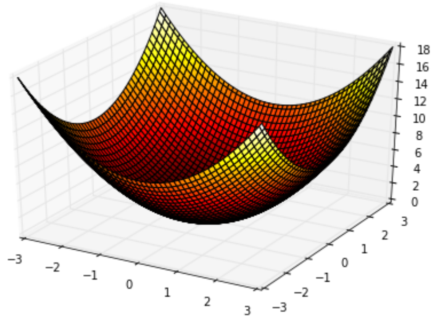

Figura 11.6: Gráfico da função $z = x^2 + y^2$.

Exemplo 11.11. *Se $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, então $(0, 0)$ é um ponto de máximo absoluto de f, pois, para qualquer que seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se*

$$f(0, 0) = 1 = e^0 \geq e^{-(x^2+y^2)} = f(x, y),$$

e o valor máximo de f é 1, que é atingido na origem, como ilustrado na Figura 11.7, a qual mostra o gráfico da função $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

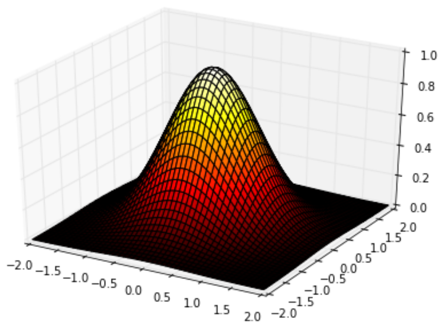

Figura 11.7: Gráfico da função $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

Definição 11.9 (Mínimo e máximo absoluto de uma função de n váriáveis)**.** *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a = (a_1, ..., a_n) \in A$. O ponto $a = (a_1, ..., a_n)$ é um ponto de mínimo absoluto de f em A se*

$$f(a) \leq f(x),$$

para qualquer que seja $x \in A$. O ponto $a = (a_1, ..., a_n)$ é um ponto de máximo absoluto de f em A se

$$f(a) \geq f(x),$$

para qualquer que seja $x \in A$. Em ambos os casos, o ponto $a = (a_1, ..., a_n)$ é um extremo absoluto ou global de f e a quantidade $f(a_1, ..., a_n)$ é chamada de valor extremo de f.

Para funções de uma única variável, é conhecido o Teorema de Weierstrass ou Teorema do Valor Extremo, o qual diz que se f for uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto em $[a, b]$. Neste momento, tem-se uma situação análoga para funções de duas ou mais variáveis.

Teorema 11.1 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se $f(x, y)$ for uma função contínua no conjunto compacto A, então existirão pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A tais que, para todo (x, y) em A,*

$$f(x_1, y_1 \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2).$$

O Teorema de Weierstrass pode ser facilmente estendido para funções de n variáveis reais a valores reais. Sua demonstração será omitida, pois foge o escopo dos objetivos desse texto. O leitor, interessado na demonstração poderá consultar Apostol (1981). Tal teorema garante que se f for uma função contínua em A e A for um conjunto compacto, então existirão pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A tais que, $f(x_1, y_1)$ é o valor mínimo e $f(x_2, y_2)$ é o valor máximo de f em A. Um exemplo interessante é considerar que a temperatura varia continuamente de um ponto para outro na superfície da terra, considerada compacta. Então, há um ponto no globo terrestre no qual naquele instante, a temperatura é máxima, e um ponto em que a temperatura é mínima.

Uma pergunta natural que surge nesse momento é como determinar esses pontos. Suponha que a função f admita derivadas parciais em todos os pontos interiores ao conjunto A. Então, entre os pontos interiores de A, os únicos com possibilidades de serem extremos são os pontos críticos. O primeiro passo consiste, então, em determinar os pontos críticos da função f que estão no interior de A. Em seguida, procura-se determinar os valores extremos de f na fronteira de A. Compara-se, então, os valores que a função f assume nos pontos críticos com os valores extremos de f na fronteira de A: o maior destes valores será o valor máximo de f em A e o menor desses valores será o valor mínimo de f em A.

Exemplo 11.12. *A função $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x$, definida na região triangular $T = \{(x, y; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3x\}$, é contínua em T e T é um conjunto compacto. Logo, pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 11.1), a função f admite um máximo e um mínimo absolutos em T. Para encontrar esses extremos, primeiro, busca-se os pontos críticos de f no interior de T. O gradiente de f é dado por*

$$\nabla f(x, y) = (4y - 2x - 6, 4x - 2y)$$

e está definido em todo $\mathbb{R}^2$*. Os pontos críticos de* f *são os pontos* (x, y) *que anulam o gradiente de* f*, ou seja,*

$$\begin{cases} 4y - 2x - 6 = 0, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases} \tag{11.7}$$

A única solução do Sistema, descrito pela Eqs. 11.7, é $x = 1$*,* $y = 2$*. O ponto crítico* $(1, 2)$ *é um ponto interior ao conjunto* T*. Procura-se agora os valores extremos de* f *na fronteira da região* T*. Os valores de* f *nesses segmentos de reta são dados pelas funções*

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -t^2 - 6t, && t \in [0, 2]\,, \\ f_2(t) &= -(t-4)^2, && t \in [0, 6]\,, \\ f_3(t) &= 2t^2 - 6t, && t \in [0, 2]\,. \end{aligned}$$

As funções f_1 *e* f_2 *não possuim pontos críticos em seus intervalos de definição. Por outro lado, a função* f_3 *tem um ponto crítico em* $t = \frac{3}{2}$*. Calcula-se agora essas funções nas extremidades dos intervalos de domínio e no ponto crítico de* f_3*. Assim,*

$$\begin{aligned} &f_1(0) = f_3(0) = f(0, 0) = 0 \\ &f_1(2) = f_2(0) = f(2, 0) = -16 \\ &f_2(6) = f(2, 6) = -4 \\ &f_2\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

A função f*, calculada no ponto crítico* $(1, 2)$*, resulta* $f(1, 2) = -3$*. Logo, o valor máximo absoluto de* f *é* 0 *e é atingido no ponto* $(0, 0)$*, enquanto o valor mínimo absoluto de* f *é* -16 *e é atingido no ponto* $(2, 0)$*.*

11.3 Multiplicadores de Lagrange

Em 1755, o matemático italiano Joseph Luis Lagrange desenvolveu um método para resolver problemas de otimização sujeitos a certas restrições, no qual ficou conhecido por Método dos Multiplicadores de Lagrange. Problemas de otimização com restrições estão presentes em diversas áreas do conhecimento e desempenham um papel importante na resolução de diversos problemas do mundo real. Por exemplo, um fazendeiro precisa cercar um pasto retangular de 3200 metros quadrados na margem de um rio e não é necessário cercar o lado limitado pelo rio. Deseja-se obter as dimensões do pasto para que o comprimento total da cerca (a tela que fará a cerca é adquirida por metro linear) seja o menor possível, ou seja, pretende-se economizar na quantidade de tela utilizada. Em outras palavras, tem-se um problema de otimização com uma restrição. Estuda-se primeiro o caso de se otimizar uma função $f(x, y)$, com uma restrição do tipo $g(x, y) = c$. Em linguagem matemática, escreve-se:

$$\text{Otimizar } f(x, y), \text{ sujeito a } g(x, y) = c.$$

É importante enfatizar que a palavra otimizar significa maximizar ou minimizar. Voltando ao caso do fazendeiro, sejam x e y, o comprimento e a largura do pasto, respectivamente. O problema consiste em obter as dimensões x e y do pasto que esteja cercado com a menor quantidade possível de tela, ou seja,

$$\text{Minimizar } f(x, y) = x + 2y, \text{ sujeito a } xy = 3200.$$

Nesse problema, a função a ser minimizada é o perímetro da cerca que corresponde à quantidade $x + 2y$. A restrição $xy = 3200$ corresponde à área do pasto que pertence ao fazendeiro. A resposta para esse problema será um par (x, y) que será o valor mínimo da função $f(x, y)$, tal que $xy = 3200$. No próximo teorema (Teorema 11.2), será apresentado um método para obter extremos locais conhecido como método dos multiplicadores de Lagrange.

Teorema 11.2 (Método dos multiplicadores de Lagrange)**.** *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em A e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = c\}$. Se a função f admite um extremo local em $(a_1, a_2) \in S$ e $\nabla g(a_1, a_2) \neq 0$, então existe um número real λ, tal que*

$$\nabla f(a_1, a_2) = \lambda \nabla g(a_1, a_2).$$

O número real λ é denominado multiplicador de Lagrange.

Demonstração. Como, por hipótese, $\nabla g(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Supõe-se, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a_1, a_2) \neq 0.$$

Assim, o Teorema da Função Implícita (Teorema 9.1) garante a existência de um intervalo aberto I, tal que $a_1 \in I$, e de uma função diferenciável $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, em que

$$g(x, h(x)) = c$$

e

$$h(a_1) = a_2.$$

Seja a função $F : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = f(x, h(x)).$$

A função F é a composição da curva $\alpha(x) = (x, h(x))$, definida em I, com a função f que assume um valor extremo no ponto (a_1, a_2), em S, definida por $g(x, y) = c$. Como f e h são funções diferenciáveis, F é uma função diferenciável e

$$F^{'}(x) = \left\langle \nabla f(x, h(x)), (1, h^{'}(x)) \right\rangle.$$

Além disso, F assume um valor extremo local no ponto a_1. Portanto,

$$F^{'}(a_1) = \left\langle \nabla f(a_1, a_2), (1, h^{'}(a_1)) \right\rangle = 0.$$

Mas, $h(a_1) = a_2$ e

$$h^{'}(a_1) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a_1, a_2)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a_1, a_2)}.$$

Assim,

$$\left\langle \nabla f(a_1, a_2), \left(1 - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a_1, a_2)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a_1, a_2)}\right) \right\rangle = 0.$$

Multiplicando essa última igualdade por

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a_1, a_2) \neq 0,$$

segue

$$\left\langle \nabla f(a_1, a_2), \left(\frac{\partial g}{\partial y}(a_1, a_2), -\frac{\partial g}{\partial x}(a_1, a_2)\right) \right\rangle = 0.$$

Os vetores

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}(a_1, a_2), -\frac{\partial g}{\partial x}(a_1, a_2)\right)$$

e

$$\nabla f(a_1, a_2) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(a_1, a_2), \frac{\partial g}{\partial y}(a_1, a_2)\right)$$

são ortogonais, uma vez que o produto interno deles é nulo. Como esses vetores estão contidos em $\mathbb{R}^2$, conclui-se que $\nabla g(a_1, a_2)$ e $\nabla f(a_1, a_2)$ são colineares. Assim, existe um número $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\nabla f(a_1, a_2) = \lambda \nabla g(a_1, a_2)$.

O Teorema 11.2 será utilizado para resolver o problema do fazendeiro discutido anteriormente. Para isso, sejam

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x+2y, \\ g(x,y) &= xy-3200, \\ \nabla f(x,y) &= (1,2), \\ \nabla g(x,y) &= (y,x). \end{aligned}$$

Deve-se resolver o sistema

$$\begin{cases} (1,2) = \lambda(y,x), \\ xy = 3200, \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\lambda y = 1 \tag{11.8}$$

$$\lambda x = 2 \tag{11.9}$$

$$xy = 3200 \tag{11.10}$$

Das Eqs. 11.8 e 11.9, tem-se

$$x = \frac{2}{\lambda}$$

e

$$y = \frac{1}{\lambda}.$$

Substituindo x e y na Eq. 11.10, segue

$$\frac{2}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = 3200 \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{40}.$$

Como x e y são números reais positivos, segue que $\lambda = 1/40$ e, com isso, obtém-se $x = 80$ e $y = 40$. Portanto, o fazendeiro deve utilizar 80 metros de tela no comprimento e 40 metros na largura.

Exemplo 11.13. *Seja o ramo de hipérbole $xy = 1$, $x > 0$. Para obter o ponto dessa curva mais próximo da origem, utiliza-se o método dos multiplicadores de Lagrange. O problema de otimização, a se resolver, consiste em*

$$\textit{Minimizar } d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \textit{ sujeito a } xy = 1.$$

Minimizar uma função distância, equivale a minimizar o quadrado da distância, ou seja, $f(x,y) = x^2+y^2$. Essa observação ajuda muito na hora de efetuar os cálculos, uma vez *que a função não terá nenhum radical. Deve-se, portanto, resolver o sistema*

$$\begin{cases} (2x, 2y) = \lambda(y, x), \\ xy - 1 = 0, x > 0, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$2x = \lambda y, \tag{11.11}$$

$$2y = \lambda x, \tag{11.12}$$

$$xy = 1, x > 0. \tag{11.13}$$

Isolando y na Eq. 11.12 e substituindo seu valor na Eq. 11.11, segue que

$$2x = \lambda\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \Longleftrightarrow 4x = \lambda^2 x \Longleftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Como $x > 0$, o problema admite um único multiplicador de Lagrange $\lambda = 2$. Assim, a única solução correspondente a $\lambda = 2$ é $(x, y) = (1, 1)$. Tal ponto representa um candidato a extremo da função f sujeito a condição dada. Uma pergunta natural nesse momento é se esse ponto é de fato um ponto de mínimo de f. Por definição, o ponto $(1, 1)$ é um ponto de mínimo de f sobre o ramo de hipérbole $xy = 1$, $x > 0$ se

$$f(1, 1) \leq f(x, y)$$

ou

$$f(x, y) - f(1, 1) \geq 0.$$

Então,

$$f(x, y) - f(1, 1) = x^2 + y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} \geq 0,$$

isto é, $f(x, y) \leq f(1, 1)$ para todo (x, y) sobre o ramo de hipérbole $xy = 1$, $x > 0$.

Quando lida-se com problemas de otimização com restrições, não há critérios simples para distinguir os pontos de máximo dos de mínimo. Cada ponto obtido pelo método dos multiplicadores de Lagrange deve ser examinado separadamente, utilizando os dados do problema e/ou, argumentos geométricos.

Exemplo 11.14. *Para obter os extremos da função $f(x, y) = xy$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, utiliza-se o método dos multiplicadores de Lagrange. Para isso, deve-se* *resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} (y, x) = \lambda(2x, 2y), \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

ou, equivalentemente

$$y = 2\lambda x \tag{11.14}$$

$$x = 2\lambda y \tag{11.15}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{11.16}$$

Utilizando as Eqs. 11.14 e 11.15, obtém-se $y(1 - 4\lambda^2) = 0$. *Se* $y = 0$ *e levando em conta a Eq. 11.16, tem-se que* $x = \pm 1$. *Por outro lado,* $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. *Se* $\lambda = \frac{1}{2}$, *segue que* $y = x$ *e da Eq. 11.16, obtêm-se* $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Caso* $\lambda = -\frac{1}{2}$ *segue que* $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Com isso, o método empregado apontou os seguintes pontos como canditados a extremos de* f *sobre a circunferência: Portanto, o valor máximo de* f *restrita a circunferência* $x^2 + y^2 = 1$ *é*

Tabela 11.3: Pontos críticos obtidos pelo método de Lagrange.

Ponto Crítico (x, y)	$f(x, y)$
$A = (0, -1)$	0
$B = (0, 1)$	0
$C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{2}$
$D = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{2}$
$E = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{2}$
$F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{2}$

$1/2$. *Esse valor é atingido nos pontos* C *e* D *e o valor mínimo é* $-1/2$ *que é atingido nos pontos* E *e* F.

O Teorema 11.2 pode ser facilmente estendido para funções de n variáveis, como descrito abaixo.

Teorema 11.3 (Método dos multiplicadores de Lagrange para uma função de n variáveis)**.** *Sejam* $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções de classe* C^1 *em* A *e* $S = \{x \in A; g(x) = c\}$. *Se a função* f *admite um extremo local em* $a \in S$ *e* $\nabla g(a) \neq 0$, *então existe um número real* λ *tal que*

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

No Exemplo 11.15, é ilustrado o uso do Método dos Multiplicadores de Lagrange para uma função de três variáveis.

Exemplo 11.15. *Para obter o ponto do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, cuja soma das coordenadas seja máxima, utiliza-se o método dos multiplicadores de Lagrange, na qual deve-se maximizar a função $f(x, y, z) = x + y + z$ com a restrição $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Em outras palavras, deve-se resolver o seguinte sistema*

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) &= \lambda(2x, 4y, 6z), && (11.17) \\ 1 &= x^2 + 2y^2 + 3z^2. && (11.18) \end{aligned}$$

Como λ deve ser não nulo, da Eq. 11.17 segue que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\lambda}, \\ y &= \frac{1}{4\lambda}, \\ z &= \frac{1}{6\lambda}. \end{aligned}$$

Substituindo na Eq. 11.18,

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} + \frac{3}{36\lambda^2} = 1,$$

ou seja,

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{11}{24}}.$$

Com isso, os canditados a extremos são os pontos

$$A = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right)$$

e

$$B = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right).$$

Como a função $f(x, y, z) = x+y+z$ é contínua no conjunto compacto $x^2+2y^2+3z^2 = 1$ e $f(A) > f(B)$, segue que o ponto procurado é

$$A = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right).$$

Exemplo 11.16. *Para obter os extremos da função $f(x, y, z) = x^2 - y + z$ no conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0\}$, é preciso buscá-los no interior de A e na* *sua fronteira de A. Como a função f é contínua no conjunto A, que é uma bola fechada, limitada pela esfera de centro no ponto $(0, 0, 2)$ e raio 2; o Teorema de Weierstrass (Teorema 11.1) garante que f admite máximo e mínimo absolutos em A. Inicia-se a busca dos pontos críticos de f no interior do conjunto A. Para isso, calcula-se o gradiente de f, ou seja,*

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 1, 1).$$

Como $\nabla f(x, y, z)$ nunca se anula, segue que a função f não admite candidatos a extremos no interior do conjunto A. Para se determinar os pontos críticos de f na fronteira de A, utiliza-se o método dos multiplicadores de Lagrange. Em outras palavras, deve-se buscar os extremos da função $f(x, y, z) = x^2 - y - z$ no conjunto determinado por $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$. Logo, deve-se resolver o seguinte sistema

$$\begin{aligned} (2x, -1, -1) &= \lambda(2x, 2y\, 2z - 4), \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z &= 0, \end{aligned}$$

que é equivalentemente a resolver as equações

$$2x = 2\lambda x \tag{11.19}$$
$$-1 = 2\lambda y \tag{11.20}$$
$$-1 = 2\lambda(z - 2) \tag{11.21}$$
$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 4z \tag{11.22}$$

Se $\lambda = 1$, a Eq. 11.19 é verificada para todos os valores de x. Das Eqs. 11.20 e 11.21, segue que $y = -1/2$ e $z = 3/2$. Substituindo esses valores na Eq. 11.22, obtêm-se $x = \pm\sqrt{14}/2$. Assim, surge dois candidatos a extremos:

$$A = \left(-\sqrt{14}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

e

$$B = \left(\sqrt{14}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Na Eq. 11.19, caso $x = 0$, ela será atendida para todos os valores de λ. Além disso, das Eqs. 11.20 e 11.21, segue que

$$2\lambda y = 2\lambda(z - 2),$$

que, se $\lambda \neq 0$, gera $y = z - 2$. Substituindo $x = 0$ e $y = z - 2$ na Eq. 11.22, obtêm-se

$y = \pm\sqrt{2}$. *Assim, surge mais dois candidatos a extremos de* f*:*

$$C = (0, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

e

$$D = (0, -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}).$$

Para determinar a natureza de cada candidato a extremo, avaliação o seu valor na função f *e, em seguida, compara-se o maior e o menor valor obtido, ou seja,*

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{5}{2}, \\ f(B) &= \frac{5}{2}, \\ f(C) &= -2 - 2\sqrt{2}, \\ f(D) &= -2 + 2\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{11.23}$$

Portanto, o valor máximo de f *restrita ao conjunto* A *é* $\frac{5}{2}$*. Esse valor é atingido nos pontos* A *e* B*. Logo, o valor mínimo é* $-2 - 2\sqrt{2}$*, o qual é atingido no ponto* C*.*

Até agora, utilizou-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange para abordar situações em que era preciso otimizar uma função f com uma dada restrição $g = c$. É possível submeter o domínio de f a mais do que uma restrição, como descrito no Teorema abaixo.

Teorema 11.4 (Método dos multiplicadores de Lagrange com duas restrições)**.** *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *em* A *e* $S = \{(x, y, z) \in A; g_1(x, y, z) = c_1, g_2(x, y, z) = c_2\}$ *um conjunto não vazio, em que* $g, h : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções de classe* C^1 *em* A*. Se a função* f *admite um extremo local em* $(a_1, a_2, a_3) \in S$ *e os vetores* $\nabla g_1(x, y, z)$ *e* $\nabla g_2(x, y, z)$ *são linearmente independentes em* S*, então existem números reais* λ_1 *e* λ_2*, tais que*

$$\nabla f(a_1, a_2, a_3) = \lambda_1 \nabla g_1(a_1, a_2, a_3) + \lambda_2 \nabla g_2(a_1, a_2, a_3).$$

Em geral, o conjunto de restrições define uma curva, obtida pela interseção da superfície definida por $g_1(x, y, z) = c_1$ com a superfície definida por $g_2(x, y, z) = c_2$. Nesse caso, procura-se os pontos extremos locais de f ao longo de tal curva.

O Teorema 11.4 fornece uma condição necessária para que o ponto (a_1, a_2, a_3) seja um ponto extremo local de f em S. Essa condição é que o vetor gradiente de f, neste ponto, pertença ao plano gerado pelos vetores gradientes de g_1 e de g_2. Se $\nabla g_1(x, y, z)$ e $\nabla g_2(x, y, z)$ são linearmente independentes, então $\nabla g_1(x, y, z) \wedge \nabla g_2(x, y, z)$ é um vetor não nulo e tangente à curva S.

Agora, no ponto (a_1, a_2, a_3), extremo de f em S, a superfície de nível de f é tangente a tal curva interseção. Como $\nabla f(a_1, a_2, a_3)$ é ortogonal a tal superfície, deve ser ortogonal a $\nabla g_1(x, y, z) \wedge \nabla g_2(x, y, z)$ e, portanto, pertence ao plano gerado pelos vetores $\nabla g_1(x, y, z)$ e $\nabla g_2(x, y, z)$. Em outras palavras, existem números reais λ_1 e λ_2, tais que $\nabla f(a_1, a_2, a_3) = \lambda_1 \nabla g_1(a_1, a_2, a_3) + \lambda_2 \nabla g_2(a_1, a_2, a_3)$.

Exemplo 11.17. *Seja S o conjunto definido pelo sistema*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ y = x. \end{cases}$$

Deseja-se obter os pontos de S mais próximos do ponto $(0, 0, 1)$. O conjunto S resulta da interseção da esfera de raio $\sqrt{2}$ e centro na origem com o plano vertical $y = x$ e, portanto, é uma circunferência. Logo, deve-se minimizar a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$, restrita ao conjunto S. Como S é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$ e, sendo $f \in C^1$, terá mínimo absoluto nesse conjunto. Assim, sejam $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $g_2(x, y, z) = y - x$. Então,

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z), \\ g_1(x, y, z) = c_1, \\ g_2(x, y, z) = c_2, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda_1 x - \lambda_2 \\ 2y = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2(z-1) = 2\lambda_1 z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$$

que é equivalentemente a

$$2x(1-\lambda_1) = -\lambda_2, \tag{11.24}$$

$$2y(1-\lambda_1) = \lambda_2, \tag{11.25}$$

$$z(1-\lambda_1) = 1, \tag{11.26}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 2, \tag{11.27}$$

$$y = x. \tag{11.28}$$

Tendo em vista que $y = x$, das Eqs. 11.24 e 11.25, conclui-se que $\lambda_2 = 0$. Da Eq. 11.24, segue que

$$x(1-\lambda_1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

e

$$\lambda_1 = 1.$$

Se $\lambda_1 = 1$, então da Eq. 11.26, obtém-se $0 = 1$. Assim $y = x$ e da Eq. 11.27 tira-se que $z = \pm\sqrt{2}$. Portanto, os pontos a considerar são $(0,0,-\sqrt{2})$ e $(0,0,\sqrt{2})$. Claramente, o ponto mais próximo de $(0,0,1)$ é o ponto $(0,0,\sqrt{2})$.

Exemplo 11.18. *Seja S o conjunto definido pelo sistema*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z = 4, \\ x+y-z = 0. \end{cases}$$

Deseja-se obter os extremos da função $f(x,y,z) = 2x+2y-z$ em S. O conjunto S é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$, pois trata-se da interseção de um paraboloide de revolução com um plano. Por outro lado, a função f é contínua em todo $\mathbb{R}^3$, e, em particular, é contínua em S, o que assegura a existência de tais extremos. Os pontos procurados são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z), \\ g_1(x,y,z) = c_1, \\ g_2(x,y,z) = c_2, \end{cases}$$

em que $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ *e* $g_2(x,y,z) = x + y - z$. *Então,*

$$2 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{11.29}$$

$$2 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \tag{11.30}$$

$$-1 = \lambda_1 - \lambda_2 \tag{11.31}$$

$$4 = x^2 + y^2 + z \tag{11.32}$$

$$0 = x + y - z \tag{11.33}$$

Da Eq. 11.31, segue que $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$, *que substituída nas Eqs. 11.29 e 11.30 gera*

$$\lambda_1(2x + 1) = 0$$

e

$$\lambda_1(2y + 1) = 0.$$

Se $\lambda_1 \neq 0$, *segue que* $x = y$, *que substituído nas Eqs. 11.32 e 11.34, resulta*

$$2x^2 + z = 4, \tag{11.34}$$

$$2x - z = 0. \tag{11.35}$$

Somando as Eqs. 11.34 com 11.35, obtém-se $x^2 + x - 2 = 0$, *cujas raízes são* $x = 1$ *e* $x = -2$. *Como* $x = y$ *e* $z = 2x$, *os pontos* $(1, 1, 2)$ *e* $(-2, -2, -4)$ *são as soluções do sistema inicial com* $\lambda_1 \neq 0$.

No Teorema 11.5, é apresenta uma generalização do método dos multiplicadores de Lagrange. O leitor interessado na demonstração poderá consultar Apostol (1981).

Teorema 11.5. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *em* A *e* $S = \{x \in A; g_i(x) = c_i, i = 1, ..., m, m < n\}$ *um conjunto não vazio, em que* $g_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções de classe* C^1 *em* A, $\forall i = 1, ..., m$. *Se a função* f *admite um extremo local em* $a = (a_1, ..., a_n) \in S$ *e os vetores* $\nabla g_1(x), ..., \nabla g_m(x)$ *são linearmente independentes em* S*; então, existem números reais* $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *tais que*

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + ... + \lambda_m \nabla g_m(a).$$

Observação 11.1. *O Teorema 11.5 garante que o ponto crítico satisfaz a um sistema com* $n + m$ *equações,*

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + ... + \lambda_m \nabla g_m(x),$$

mais m *equações de restrições,*

$$g_i(x) = c_i.$$

Assim, tem-se um sistema em $n + 2m$ *incógnitas.*

Uma forma alternativa de abordar os multiplicadores de Lagrange é descrito a seguir.

Definição 11.10 (Função lagrangeana). *A função*

$$L : U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$L(x, \lambda) = f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle,$$

em que $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x, \lambda) = 0$, $i = 1, ..., n + m$ *e* $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x, \lambda) = 0$, $j = 1, ..., m$ *é chamada de função lagrangeana ou lagrangeano.*

Referências Bibliográficas

APOSTOL, T. M. *Cálculo*. [S.l.]: Editora Reverté Ltda, 1981.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*: Projeto euclides. Impa. Rio de Janeiro: [s.n.], 1989.