# Aula 17 -Anuidade com pagamentos certos

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

11/2023

| | | | | Fracionadas | Contínuas |
|---|---|---|---|---|---|
| Imediata | Vitalícia | Antecipada | $\ddot{a}_x$ | $\ddot{a}_x^{(m)}$ | $\bar{a}_x$ |
| | | Postecipada | $a_x$ | $a_x^{(m)}$ | |
| | Temporária | Antecipada | $\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}$ | $\ddot{a}_{x:\bar{n}\|}^{(m)}$ | $\bar{a}_{x:\bar{n}\|}$ |
| | | Postecipada | $a_{x:\overline{n}\|}$ | $a_{x:\bar{n}\|}^{(m)}$ | |
| Diferida | Vitalícia | Antecipada | ${}_{m\|}\ddot{a}_x$ | ${}_{k\|}\ddot{a}_x^{(m)}$ | ${}_{m\|}\bar{a}_x$ |
| | | Postecipada | ${}_{m\|}a_x$ | ${}_{k\|}a_x^{(m)}$ | |
| | Temporária | Antecipada | ${}_{m\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}$ | ${}_{k\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}^{(m)}$ | ${}_{m\|}\bar{a}_{x:\overline{n}\|}$ |
| | | Postecipada | ${}_{m\|}a_{x:\overline{n}\|}$ | ${}_{k\|}a_{x:\overline{n}\|}^{(m)}$ | |

# Importantes relação envolvendo anuidades e seguros

$$\ddot{a}_x = a_x + 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}$$

$$\ddot{a}_x \geq \ddot{a}_x^{(m)} \geq \bar{a}_x \geq a_x^{(m)} \geq a_x$$

$$A_x = v\ddot{a}_x - a_x$$

$$A_{x^1:\bar{n}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - a_{x:\bar{n}|}$$

$$A_{x:\bar{n}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - a_{x:\overline{n-1|}}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v}$$

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v}$$

$$A_{x:\bar{n}|} + iA_{x^1:\bar{n}|} + ia_{x:\overline{n|}} = 1$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente $m$ parcelas para o segurado ou outrem e, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

Caso o segurado morra antes do tempo $m$ a seguradora precisa ter o valor presente necessário a $m$ pagamentos .

Caso o segurado morra após $m$ anos, a seguradora devererá ter o necessário a pagar os $m$ pagamentos mais anuidades vitalícias descartado os pagamentos já efetuados.

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

Fluxo de caixa antecipado

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:m}|}} = \sum_{t=0}^{m-1} \ddot{a}_{\overline{m}|} p(T_x = t) + \sum_{t=m}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} p(T_x = t)$$

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:m}|}} = \ddot{a}_{\overline{m}|}({}_m q_x) + \sum_{t=m}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}\, {}_t p_x q_{x+t}$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

Fluxo de caixa antecipado

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:m}|}} = \ddot{a}_{\overline{m}|}({}_{m}q_x) + \sum_{t=m}^{\omega-x} \ddot{a}_{\overline{T_x+1}|}\ {}_{t}p_x q_{x+t}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:m}|}} = \ddot{a}_{\overline{m}|}({}_{m}q_x) + \sum_{t=m}^{\omega-x} v^t\ {}_{t}p_x$$

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:m}|}} = \ddot{a}_{\overline{m}|} + \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

Fluxo de caixa postecipado

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ a_{\overline{T_x}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$a_{\overline{\overline{x:m}|}} = a_{\overline{m}|}({}_{m}q_x) + \sum_{t=m+1}^{\omega-x} v^t \; {}_t p_x$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

Anuidade contínua

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{m}|}, & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T_x}|}, & T \geq m \end{cases}$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \frac{1 - e^{-\delta m}}{\delta} \, {}_t p_x \mu(x+t)dt + \int_m^\infty \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \, {}_t p_x \mu(x+t)dt$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

O valor esperado dessa variável será:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \int_0^m \bar{a}_{\overline{m}|} f_{T_x}(t)dt + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \bar{a}_{\overline{m}|} \; {}_mq_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} \; {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

**EXEMPLO 1:** Considere, o caso em que uma seguradora pagará certamente 30 parcelas para o segurado ou seus dependentes, a partir desse ponto, a seguradora continuara pagando caso o segurado esteja vivo.

Calcule o prêmio puro único para esse produto considerando que o segurado tenha o seu tempo de vida adiconal modelado por:

$$f_{T_x}(t) = 0{,}016e^{-0{,}016t} \text{ para } t > 0.$$

E considere também $\delta = 0{,}10$ e o benefício unitário.

**EXEMPLO 1**

Lembrando que ${}_mq_x = F_{T_x}(m)$, temos que:

$${}_mq_x = 1 - e^{-0{,}016m}$$

Assim:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{m}|}} = \frac{\left(1 - e^{-\delta m}\right)}{\delta}\, {}_mq_x + \int_m^\infty \frac{\left(1 - e^{-\delta t}\right)}{\delta}\, {}_tp_x\mu(x+t)dt$$

Tem-se:

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1}\left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + \int_{30}^\infty \frac{\left(1 - e^{-0{,}1t}\right)}{0{,}1} 0{,}016e^{-0{,}016t}dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0{,}1(30)}\right)}{0{,}1}\left(1 - e^{-0{,}016(30)}\right) + 0{,}16\int_{30}^\infty e^{-0{,}016t} - e^{-0{,}116t}dt$$

**EXEMPLO 1**

...

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = \frac{\left(1 - e^{-0,1(30)}\right)}{0,1}\left(1 - e^{-0,016(30)}\right) + 0,16\int_{30}^{\infty} e^{-0,016t} - e^{-0,116t}dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = (9,502)(0,3812) + 0,16\left[-\frac{1}{0,016e^{0,016t}} + \frac{1}{(0,116)e^{t(0,116)}}\right]_{t=30}^{t\to\infty}$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} = (9,502)(0,3812) + 0,16\left(\frac{1}{0,016e^{0,016(30)}} - \frac{1}{(0,116)e^{(30)(0,116)}}\right)$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\overline{30}|}} \approx 9,85$$

Lembrando que

$$\bar{a}_x = 8,62$$

# Anuidades Vitalícias com pagamentos certos para $m$ anos.

$$\bar{a}_{\overline{x,\bar{m}|}} = \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta}\,{}_{m}q_x + \int_m^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\,{}_{t}p_x\mu(x+t)dt$$

$$\ldots$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\bar{m}|}} = \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta} + \int_m^\infty e^{-\delta t}\,{}_{t}p_x dt$$

$$\bar{a}_{\overline{x,\bar{m}|}} = \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta} + {}_{m|}\bar{a}_x$$

# Anuidades com benefício crescente

# Produtos Atuariais com benefício crescente

## Anuidade

Os benefícios pagos variam segundo uma progressão aritmética.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

em que $a_1$ é termo inicial e $r$ é a razão.

# Anuidades com benefício crescente

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}\ddot{a}_x$$

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_{t|}a_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}\ddot{a}_{x:\overline{n-t|}}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}a_{x:\overline{n-t|}}$$

$$(\overline{Ia})_x = \int_0^{\infty} te^{-\delta t} {}_{t}p_x dt$$

$$(\overline{Ia})_{x:\overline{n|}} = \int_0^{n} te^{-\delta t} {}_{t}p_x dt$$

$$(IA)_x = v(I\ddot{a})_x - (Ia)_x$$

**Exemplo 2:** Calcule os valores atuariais para as anuidades com pagamentos antecipado (postecipado), que sejam adquiridas por pessoas de 40 anos de idade. Considere a tábua de vida AT-2000 Masculina, taxa de juros de 5% ao ano, cobertura de 3 anos e benefício crescente.

**Solução:**

# Solução:

$$(I\ddot{a})_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^{2} {}_{t|}\ddot{a}_{40:\overline{3-t}|} = \ddot{a}_{40:\overline{3}|} + {}_{1|}\ddot{a}_{40:\overline{2}|} + {}_{2|}\ddot{a}_{40:\overline{1}|} \approx 5{,}618$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^{2} v^t \, {}_t p_{40} \approx 2{,}845$$

$$(Ia)_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=0}^{2} {}_{t|}a_{40:\overline{3-t}|} = a_{40:\overline{3}|} + {}_{1|}a_{40:\overline{2}|} + {}_{2|}a_{40:\overline{1}|} \approx 5{,}343$$

$$a_{40:\overline{3}|} = \sum_{t=1}^{3} v^t \, {}_t p_{40} \approx 2{,}697$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/


- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.