

# Matemática atuarial

## Aula 18 Comutação

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

| Idade ( $x$ ) | $q_x$   |
|---------------|---------|
| 25            | 0,00077 |
| 26            | 0,00081 |
| 27            | 0,00085 |
| 28            | 0,00090 |
| 29            | 0,00095 |
| 30            | 0,00100 |
| 31            | 0,00107 |
| 32            | 0,00114 |
| 33            | 0,00121 |
| 34            | 0,00130 |
| 35            | 0,00139 |
| ...           |         |
| $\omega$      | 1       |

- Utilizada para calcular as probabilidades de vida e morte de uma população, em função da idade.
  - As tábuas são criadas a partir de dados provenientes de:
    - Censos Populacionais,
    - Levantamentos sobre apólices de seguros de vida,
    - Experiência de fundos de pensão,
    - Registro civil,
    - Livros de batismo e enterro ...
- Apresenta probabilidade de morte e sobrevivência de um determinado número de indivíduos em uma certa idade, entre outros dados que variam conforme a tábua.
- Aproximações.

# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

$q_x$ : Probabilidade de morte de uma pessoa com idade  $x$  antes de completar a idade de  $x + 1$  anos.

$p_x$ :  $1 - q_x$ : Probabilidade de sobrevivência de uma pessoa com idade  $x$  antes de completar a idade  $x + 1$ .

## VARIAÇÕES

${}_nq_x$ : Probabilidade de uma pessoa com idade  $x$  morrer antes de completar a idade de  $x + n$  anos.

${}_np_x$ : Probabilidade que uma pessoa com idade  $x$ , sobreviva pelo menos mais  $n$  anos.

# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

$d_x$ : Número de pessoas que faleceram entre a idade  $x$  e  $x + 1$ .

$l_x$ : Número (hipotético) de pessoas vivas com idade  $x$ .

$$l_x = l_0 {}_x p_0 = l_0 S_{T_0}(x)$$

$$S_{T_0}(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Demonstração:

$${}_n p_x = P(T_x > n) = P(T_0 > n + x | T_0 > x) = \frac{S_{T_0}(n + x)}{S_{T_0}(x)}$$

$${}_n p_x = \frac{\frac{l_{x+n}}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

consequentemente

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

É fácil notar que:

$${}_{m+l}p_x = ({}_m p_x)({}_l p_{x+m})$$

pois

$${}_{m+l}p_x = \frac{l_{x+m+l}}{l_x} \times \frac{l_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \times \frac{l_{x+m+l}}{l_{x+m}}$$

$${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$$

# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

$L_x$ : Tempo vivido no intervalo etário de  $x$  a  $x + 1$  ( quantidade de pessoas-ano entre as idades  $x$  e  $x + 1$ )

$$L_x = l_{x+1} + \frac{1}{2}d_x = l_{x+1} + \frac{l_x - l_{x+1}}{2} = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

${}_nL_x$ : ... quantidade de exposição ao risco durante o intervalo de  $n$  anos.

$${}_nL_x = nl_{x+n} + \frac{n}{2} nd_x = nl_{x+n} + \frac{n(l_x - l_{x+n})}{2} = \frac{n(l_x + l_{x+n})}{2}$$

$T_x$ : Tempo vivido a partir da idade  $x$  ( quantidade de pessoas-ano a partir da idade  $x$ )

$$T_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} L_{x+t}$$

# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_{m+n} p_x = ({}_m p_x) ({}_n p_{x+m})$$

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

$${}_n L_x = \frac{n(l_x + l_{x+n})}{2}$$

$$T_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} L_{x+t}$$

$$\mu(x) \approx \frac{1}{2} [\ln(l_{x-1}) - \ln(l_{x+1})]$$



# Tábua de Mortalidade, Tábua de Vida ou Tábua Atuarial

| x  | qx      | px      | lx      | dx      | Lx       | Tx       |
|----|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| 0  | 0,00404 | 0,99596 | 1000000 | 4040    | 997980   | 73179375 |
| 1  | 0,00158 | 0,99842 | 995960  | 1573,62 | 995173,2 | 72181395 |
| 2  | 0,00089 | 0,99911 | 994386  | 885,004 | 993943,9 | 71186222 |
| 3  | 0,00072 | 0,99928 | 993501  | 715,321 | 993143,7 | 70192278 |
| 4  | 0,00063 | 0,99937 | 992786  | 625,455 | 992473,3 | 69199134 |
| 5  | 0,00057 | 0,99943 | 992161  | 565,532 | 991877,8 | 68206661 |
| 6  | 0,00053 | 0,99947 | 991595  | 525,545 | 991332,3 | 67214783 |
| 7  | 0,00050 | 0,99950 | 991070  | 495,535 | 990821,8 | 66223451 |
| 8  | 0,00049 | 0,99951 | 990574  | 485,381 | 990331,3 | 65232629 |
| 9  | 0,00048 | 0,99952 | 990089  | 475,243 | 989851   | 64242298 |
| 10 | 0,00048 | 0,99952 | 989613  | 475,014 | 989375,9 | 63252447 |
| 11 | 0,00049 | 0,99951 | 989138  | 484,678 | 988896   | 62263071 |
| 12 | 0,00050 | 0,99950 | 988654  | 494,327 | 988406,5 | 61274175 |
| 13 | 0,00051 | 0,99949 | 988159  | 503,961 | 987907,4 | 60285768 |
| 14 | 0,00052 | 0,99948 | 987655  | 513,581 | 987398,6 | 59297861 |
| 15 | 0,00054 | 0,99946 | 987142  | 533,057 | 986875,3 | 58310462 |
| 16 | 0,00055 | 0,99945 | 986609  | 542,635 | 986337,4 | 57323587 |
| 17 | 0,00057 | 0,99943 | 986066  | 562,058 | 985785,1 | 56337250 |
| 18 | 0,00058 | 0,99942 | 985504  | 571,592 | 985218,3 | 55351465 |
| 19 | 0,00060 | 0,99940 | 984932  | 590,959 | 984637   | 54366246 |
| 20 | 0,00062 | 0,99938 | 984342  | 610,292 | 984036,4 | 53381609 |
| 21 | 0,00065 | 0,99935 | 983731  | 639,425 | 983411,5 | 52397573 |
| 22 | 0,00067 | 0,99933 | 983092  | 658,671 | 982762,5 | 51414162 |

# Lei de mortalidade

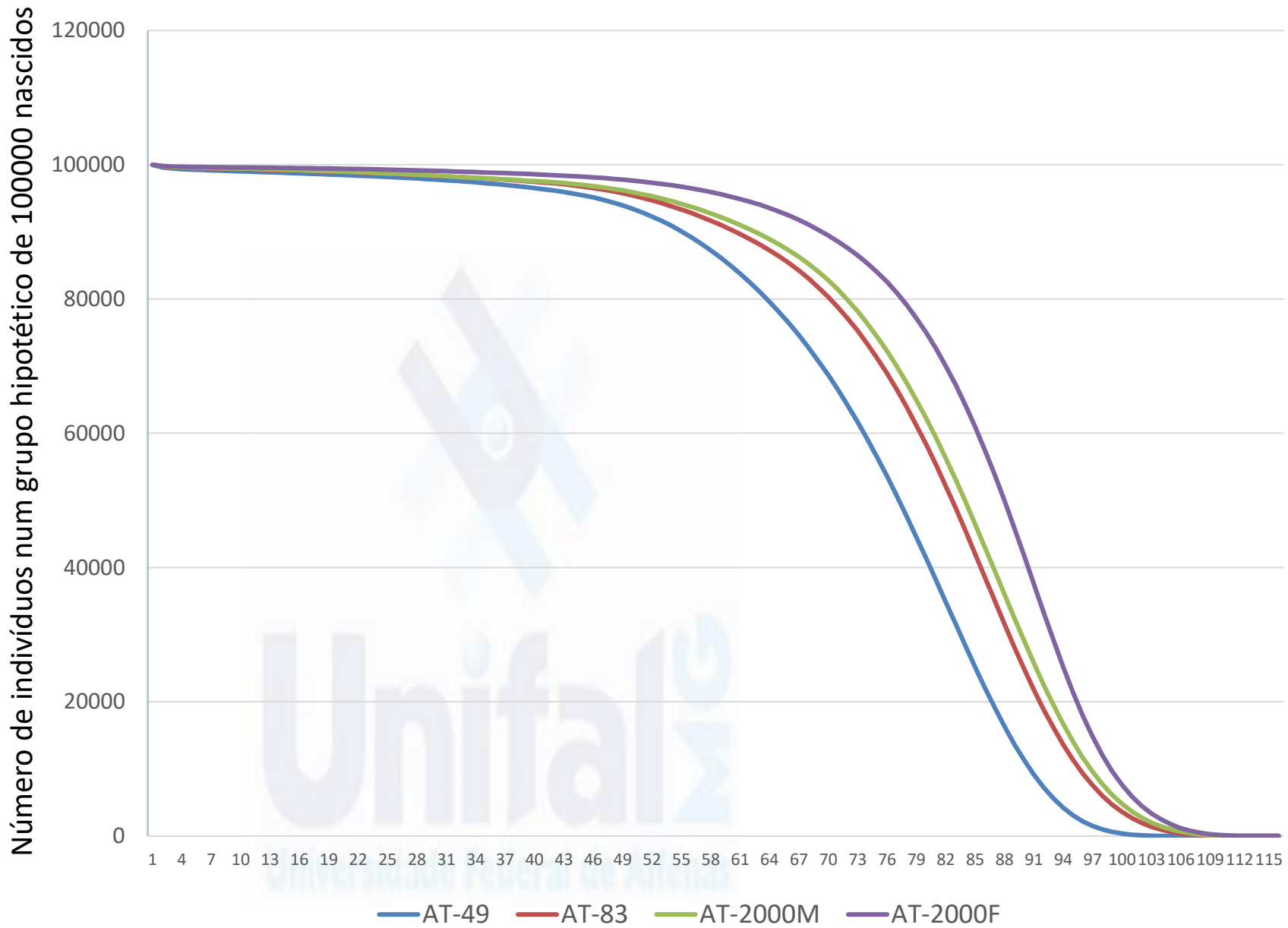
Descreve matematicamente o comportamento da mortalidade ao longo da vida de  $x$ .

➤ Lei de Moivre  $l_x = k(\omega - x)$

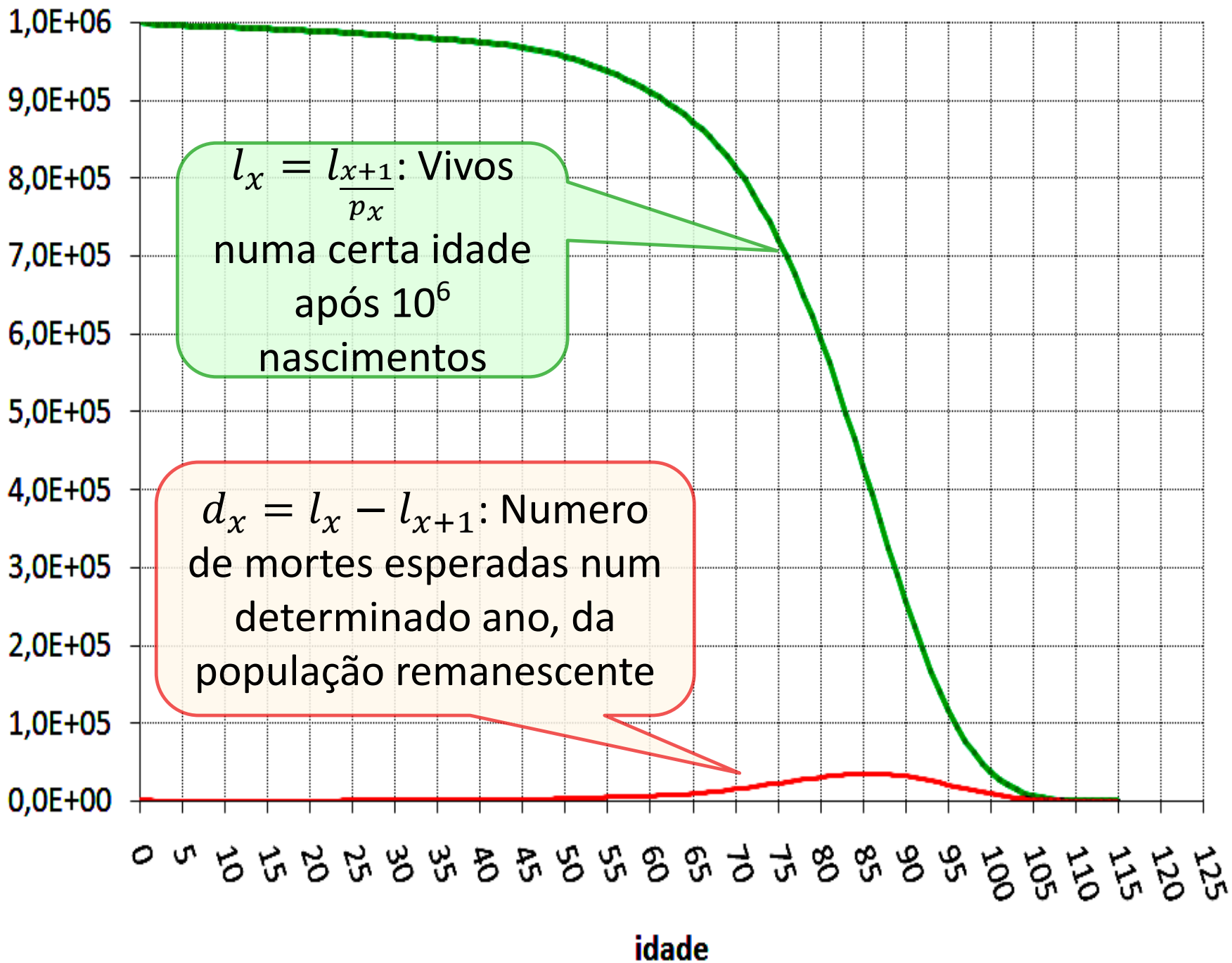
➤ Lei de Gompertz  $l_x = kg^{c^x}$   
 ${}_x p_0 = g^{c^x - 1}, \quad k = \frac{l_0}{g}, \quad c = e^k$

➤ Lei de Makeham  $l_x = ks^x g^{c^x}$   
 $S = e^{-A}$

Em que a constante  $A$  é responsável pela morte por causas acidental.



Número de indivíduos num grupo hipotético de 1 milhão de nascidos



# Comutação

- Comutação é a troca de ordem dos elementos, todavia, sem perder a sua realidade.
- No contexto atuarial esse processo é utilizado como forma de simplificar o cálculo do prêmio puro de diversos produtos atuariais
- As funções de comutação são propositadamente elaboradas de forma que seus resultados ao serem combinados levam a alguns valores atuariais conhecidos.
- Essas funções são organizadas numa tabela chamada de Tábua de comutação.

# Tábuas de comutação

- Johanes Nikolaus Tetens (Alemanha, 1736 - 1807).
  - Matemática e atuário, (1785).
- Griffith Davies ( Inglaterra- 1750-1833).
  - Atuário, (1825).



# Tábuas de comutação

- A necessidade de se trabalhar com uma taxa de juros constante, ...
- A tábua de comutação não é adequada ao uso com Tábuas geracionais.
- Perde-se a noção da natureza aleatória dos quais se originam os produtos, ...

# Funções de comutação

Principais funções de comutação (Sistema moderno)

$$D_x, N_x, S_x, C_x, M_x, R_x$$

Uma tábua de comutação é constituída a partir de dois elementos:

- i) Tábua de vida
- ii) Taxa de juros



# Funções de comutação- $D_x$

Coluna  $D_x$

$$D_x = l_x v^x = \frac{l_x}{(1+i)^x}$$

# Funções de comutação- $D_x$

Suponha  $i = 3\%$  então  $D_x = l_x v^x = \frac{l_x}{(1,03)^x}$

| x  | qx      | px      | lx                | dx        | vx              | Dx                |
|----|---------|---------|-------------------|-----------|-----------------|-------------------|
| 0  | 0,00404 | 0,99596 | 100000            | 404       | 1               | 100000            |
| 1  | 0,00158 | 0,99842 | 99596             | 157,36168 | 0,961538        | 95765,3846        |
| 2  | 0,00089 | 0,99911 | 99438,6383        | 88,500388 | 0,924556        | 91936,6109        |
| 3  | 0,00072 | 0,99928 | 99350,1379        | 71,532099 | 0,888996        | 88321,9109        |
| 4  | 0,00063 | 0,99937 | <b>99278,6058</b> | 62,545522 | <b>0,854804</b> | <b>84863,7683</b> |
| 5  | 0,00057 | 0,99943 | 99216,0603        | 56,553154 | 0,821927        | 81548,3694        |
| 6  | 0,00053 | 0,99947 | 99159,5072        | 52,554539 | 0,790315        | 78367,1989        |
| 7  | 0,0005  | 0,99950 | 99106,9526        | 49,553476 | 0,759918        | 75313,1387        |
| 8  | 0,00049 | 0,99951 | 99057,3991        | 48,538126 | 0,73069         | 72380,2713        |
| 9  | 0,00048 | 0,99952 | 99008,861         | 47,524253 | 0,702587        | 69562,3125        |
| 10 | 0,00048 | 0,99952 | <b>98961,3368</b> | 47,501442 | <b>0,675564</b> | <b>66854,7332</b> |
| 11 | 0,00049 | 0,99951 | 98913,8353        | 48,467779 | 0,649581        | 64252,5413        |
| 12 | 0,0005  | 0,99950 | 98865,3675        | 49,432684 | 0,624597        | 61751,0169        |
| 13 | 0,00051 | 0,99949 | 98815,9349        | 50,396127 | 0,600574        | 59346,2898        |
| 14 | 0,00052 | 0,99948 | 98765,5387        | 51,35808  | 0,577475        | 57034,6377        |
| 15 | 0,00054 | 0,99946 | 98714,1807        | 53,305658 | 0,555265        | 54812,4804        |
| 16 | 0,00055 | 0,99945 | 98660,875         | 54,263481 | 0,533908        | 52675,8478        |

$$D_4 = \frac{99278,6058}{(1,03)^4}$$

$$D_{10} = \frac{98961,3368}{(1,03)^{10}}$$

# Funções de comutação- $D_x$

| TÁBUA DE SOBREVIVÊNCIA - AT-49 |         |         |          |          |          |          |  |                      |    |
|--------------------------------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|--|----------------------|----|
| x                              | qx      | px      | lx       | dx       | vx       | $D_x$    |  |                      |    |
| 0                              | 0,00404 | 0,99596 | 100000   | 404      | 1        | 100000   |  |                      |    |
| 1                              | 0,00158 | 0,99842 | 99596    | 157,3617 | 0,970874 | 96695,15 |  |                      |    |
| 2                              | 0,00089 | 0,99911 | 99438,64 | 88,50039 | 0,942596 | 93730,45 |  |                      |    |
| 3                              | 0,00072 | 0,99928 | 99350,14 | 71,5321  | 0,915142 | 90919,45 |  |                      |    |
| 4                              | 0,00063 | 0,99937 | 99278,61 | 62,54552 | 0,888487 | 88207,76 |  | Fator de atualização |    |
| 5                              | 0,00057 | 0,99943 | 99216,06 | 56,55315 | 0,862609 | 85584,65 |  | i                    | 3% |
| 6                              | 0,00053 | 0,99947 | 99159,51 | 52,55454 | 0,837484 | 83044,53 |  |                      |    |
| 7                              | 0,0005  | 0,99950 | 99106,95 | 49,55348 | 0,813092 | 80583,02 |  |                      |    |
| 8                              | 0,00049 | 0,99951 | 99057,4  | 48,53813 | 0,789409 | 78196,83 |  |                      |    |
| 9                              | 0,00048 | 0,99952 | 99008,86 | 47,52425 | 0,766417 | 75882,05 |  |                      |    |
| 10                             | 0,00048 | 0,99952 | 98961,34 | 47,50144 | 0,744094 | 73636,53 |  |                      |    |
| 11                             | 0,00049 | 0,99951 | 98913,84 | 48,46778 | 0,722421 | 71457,46 |  |                      |    |
| 12                             | 0,0005  | 0,99950 | 98865,37 | 49,43268 | 0,70138  | 69342,18 |  |                      |    |
| 13                             | 0,00051 | 0,99949 | 98815,93 | 50,39613 | 0,680951 | 67288,84 |  |                      |    |
| 14                             | 0,00052 | 0,99948 | 98765,54 | 51,35808 | 0,661118 | 65295,66 |  |                      |    |
| 15                             | 0,00054 | 0,99946 | 98714,18 | 53,30566 | 0,641862 | 63360,88 |  |                      |    |
| 16                             | 0,00055 | 0,99945 | 98660,87 | 54,26348 | 0,623167 | 61482,2  |  |                      |    |

$D_x = v^x l_x$   
 $v^x = \frac{1}{(1+i)^x}$

# Funções de comutação- $N_x$

Coluna  $N_x$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+t)} = \frac{l_x}{(1+i)^x} + \frac{l_{x+1}}{(1+i)^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{(1+i)^{x+2}} + \dots + \frac{l_{\omega-x}}{(1+i)^{\omega-x}}$$

$\omega$  corresponde a idade máxima atingida

# Funções de comutação- $N_x$

Suponha  $i = 3\%$  então:  $N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+t)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{(1,03)^{x+t}}$

| x          | qx             | px             | lx                | dx               | vx              | Dx                | Nx                 |
|------------|----------------|----------------|-------------------|------------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| 0          | 0,00404        | 0,99596        | 100000            | 404              | 1               | 100000            | 2407336,151        |
| 1          | 0,00158        | 0,99842        | 99596             | 157,36168        | 0,961538        | 95765,3846        | 2307336,151        |
| 2          | 0,00089        | 0,99911        | 99438,6383        | 88,500388        | 0,924556        | 91936,6109        | 2211570,767        |
| <b>3</b>   | <b>0,00072</b> | <b>0,99928</b> | <b>99350,1379</b> | <b>71,532099</b> | <b>0,888996</b> | <b>88321,9109</b> | <b>2119634,156</b> |
| 4          | 0,00063        | 0,99937        | 99278,6058        | 62,545522        | 0,854804        | 84863,7683        | 2031312,245        |
| 5          | 0,00057        | 0,99943        | 99216,0603        | 56,553154        | 0,821927        | 81548,3694        | 1946448,477        |
| 6          | 0,00053        | 0,99947        | 99159,5072        | 52,554539        | 0,790315        | 78367,1989        | 1864900,107        |
| 7          | 0,0005         | 0,99950        | 99106,9526        | 49,553476        | 0,759918        | 75313,1387        | 1786532,908        |
| 8          | 0,00049        | 0,99951        | 99057,3991        | 48,538126        | 0,73069         | 72380,2713        | 1711219,77         |
| 9          | 0,00048        | 0,99952        | 99008,861         | 47,524253        | 0,702587        | 69562,3125        | 1638839,498        |
| <b>10</b>  | <b>0,00048</b> | <b>0,99952</b> | <b>98961,3368</b> | <b>47,501442</b> | <b>0,675564</b> | <b>66854,7332</b> | <b>1569277,186</b> |
| 11         | 0,00049        | 0,99951        | 98913,8353        | 48,467779        | 0,649581        | 64252,5413        | 1502422,453        |
| 12         | 0,0005         | 0,99950        | 98865,3675        | 49,432684        | 0,624597        | 61751,0169        | 1438169,912        |
| 13         | 0,00051        | 0,99949        | 98815,9349        | 50,396127        | 0,600574        | 59346,2898        | 1376418,895        |
| 14         | 0,00052        | 0,99948        | 98765,5387        | 51,35808         | 0,577475        | 57034,6377        | 1317072,605        |
| 15         | 0,00054        | 0,99946        | 98714,1807        | 53,305658        | 0,555265        | 54812,4804        | 1260037,967        |
|            |                |                |                   | ...              |                 |                   |                    |
| <b>115</b> | <b>1</b>       | <b>0,00000</b> | <b>0</b>          | <b>0</b>         | <b>0,010994</b> | <b>0</b>          | <b>0</b>           |

$$N_3 = \sum_{t=0}^{112} D_{(3+t)} = D_3 + D_4 + \dots + D_{115}$$

$$N_{10} = \sum_{t=0}^{105} D_{(10+t)} = D_{10} + D_{11} + \dots + D_{115}$$

$$N_{115} = \sum_{t=0}^0 D_{(115+t)} = D_{115}$$

# Funções de comutação- $N_x$

| 3   | x   | qx      | px      | lx       | dx       | vx       | Dx       | Nx         |
|-----|-----|---------|---------|----------|----------|----------|----------|------------|
| 91  | 87  | 0,16033 | 0,83967 | 16325,58 | 2617,48  | 0,076412 | 1247,47  |            |
| 92  | 88  | 0,17512 | 0,82488 | 13708,1  | 2400,562 | 0,074186 | 1016,954 |            |
| 93  | 89  | 0,19115 | 0,80885 | 11307,53 | 2161,435 | 0,072026 | 814,4322 |            |
| 94  | 90  | 0,20849 | 0,79151 | 9146,1   | 1906,87  | 0,069928 | 639,5665 |            |
| 95  | 91  | 0,22719 | 0,77281 | 7239,229 | 1644,68  | 0,067891 | 491,4789 |            |
| 96  | 92  | 0,24733 | 0,75267 | 5594,549 | 1383,7   | 0,065914 | 368,7571 |            |
| 97  | 93  | 0,26896 | 0,73104 | 4210,849 | 1132,55  | 0,063994 | 269,4684 |            |
| 98  | 94  | 0,29212 | 0,70788 | 3078,299 | 899,2327 | 0,06213  | 191,2545 |            |
| 99  | 95  | 0,31683 | 0,68317 | 2179,066 | 690,3936 | 0,06032  | 131,442  |            |
| 100 | 96  | 0,34312 | 0,65688 | 1488,673 | 510,7934 | 0,058563 | 87,18177 |            |
| 101 | 97  | 0,37097 | 0,62903 | 977,8794 | 362,7639 | 0,056858 | 55,59996 |            |
| 102 | 98  | 0,40035 | 0,59965 | 615,1154 | 246,2615 | 0,055202 | 33,95538 | =H103+G102 |
| 103 | 99  | 0,4312  | 0,56880 | 368,854  | 159,0498 | 0,053594 | 19,7683  | 41,2531    |
| 104 | 100 | 0,46342 | 0,53658 | 209,8041 | 97,22744 | 0,052033 | 10,91671 | 21,48481   |
| 105 | 101 | 0,49687 | 0,50313 | 112,5767 | 55,93599 | 0,050517 | 5,687074 | 10,5681    |
| 106 | 102 | 0,53139 | 0,46861 | 56,64072 | 30,09831 | 0,049046 | 2,777997 | 4,881027   |
| 107 | 103 | 0,56676 | 0,43324 | 26,54241 | 15,04317 | 0,047617 | 1,263881 | 2,103029   |
| 108 | 104 | 0,60271 | 0,39729 | 11,49923 | 6,930702 | 0,046231 | 0,531615 | 0,839148   |
| 109 | 105 | 0,63896 | 0,36104 | 4,56853  | 2,919108 | 0,044884 | 0,205054 | 0,307533   |
| 110 | 106 | 0,67514 | 0,32486 | 1,649422 | 1,113591 | 0,043577 | 0,071876 | 0,102479   |
| 111 | 107 | 0,7109  | 0,28910 | 0,535831 | 0,380922 | 0,042307 | 0,02267  | 0,030603   |
| 112 | 108 | 0,74582 | 0,25418 | 0,154909 | 0,115534 | 0,041075 | 0,006363 | 0,007933   |
| 113 | 109 | 1       | 0,00000 | 0,039375 | 0,039375 | 0,039879 | 0,00157  | 0,00157    |
| 114 | 110 | 1       | 0,00000 | 0        | 0        | 0,038717 | 0        | 0          |
| 115 | 111 | 1       | 0,00000 | 0        | 0        | 0,03759  | 0        | 0          |
| 116 | 112 | 1       | 0,00000 | 0        | 0        | 0,036495 | 0        | 0          |
| 117 | 113 | 1       | 0,00000 | 0        | 0        | 0,035432 | 0        | 0          |
| 118 | 114 | 1       | 0,00000 | 0        | 0        | 0,0344   | 0        | 0          |
| 119 | 115 | 1       | 0,00000 | 0        | 0        | 0,033398 | 0        | 0          |

$$N_{98} = \sum_{t=0}^{115-98} D_{(98+t)} = D(98) + [D(99) + \dots + D(115)]$$

$N_{99}$

$$N_{114} = \sum_{t=0}^{115-114} D_{(114+t)} = D(114) + D(115)$$

$$N_{115} = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(115+t)} = D(115)$$

# Funções de comutação- $S_x$

➤ Coluna  $S_x$

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t} = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots + N_{\omega-x}$$

$\omega$  corresponde a idade máxima atingida.

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \left( \sum_{k=0}^{\omega-x+k} D_{(x+k+t)} \right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} \left( \sum_{k=0}^{\omega-x+k} l_{x+k+t} v^{x+k+t} \right)$$

*A utilização de  $S_x$  pertence ao cálculo de rendas crescentes, ...*

# Funções de comutação- $C_x$

➤ Coluna  $C_x$

$$C_x = v^{x+1}d_x$$

Lembrando que  $d_x = l_x - l_{x+1}$  e  $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ , logo:

$$C_x = v^{x+1}d_x = v^{x+1}q_x l_x$$



# Funções de comutação- $C_x$

Suponha  $i = 3\%$  então  $C_x = v^{x+1}d_x$

| x         | qx             | px             | vx             | lx            | dx             | Dx              | Nx              | Sx              | Cx              |
|-----------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0         | 0,00404        | 0,99596        | 1,00000        | 1000000       | 4040           | 1000000         | 29828309        | 7,44E+08        | 3922,33         |
| 1         | 0,00158        | 0,99842        | 0,97087        | 995960        | 1573,62        | 966951,5        | 28828309        | 7,14E+08        | 1483,285        |
| 2         | 0,00089        | 0,99911        | 0,94260        | 994386        | 885,004        | 937304,5        | 27861357        | 6,85E+08        | 809,9039        |
| 3         | 0,00072        | 0,99928        | 0,91514        | 993501        | 715,321        | 909194,5        | 26924053        | 6,58E+08        | 635,5534        |
| 4         | 0,00063        | 0,99937        | 0,88849        | 992786        | 625,455        | 882077,6        | 26014858        | 6,31E+08        | 539,5232        |
| <b>5</b>  | <b>0,00057</b> | <b>0,99943</b> | <b>0,86261</b> | <b>992161</b> | <b>565,532</b> | <b>855846,5</b> | <b>25132781</b> | <b>6,05E+08</b> | <b>473,6238</b> |
| 6         | 0,00053        | 0,99947        | 0,83748        | 991595        | 525,545        | 830445,3        | 24276934        | 5,79E+08        | 427,3165        |
| 7         | 0,00050        | 0,99950        | 0,81309        | 991070        | 495,535        | 805830,2        | 23446489        | 5,55E+08        | 391,1797        |
| 8         | 0,00049        | 0,99951        | 0,78941        | 990574        | 485,381        | 781968,3        | 22640659        | 5,32E+08        | 372,0043        |
| 9         | 0,00048        | 0,99952        | 0,76642        | 990089        | 475,243        | 758820,5        | 21858690        | 5,09E+08        | 353,6251        |
| <b>10</b> | <b>0,00048</b> | <b>0,99952</b> | <b>0,74409</b> | <b>989613</b> | <b>475,014</b> | <b>736365,3</b> | <b>21099870</b> | <b>4,87E+08</b> | <b>343,1605</b> |
| 11        | 0,00049        | 0,99951        | 0,72242        | 989138        | 484,678        | 714574,6        | 20363505        | 4,66E+08        | 339,9433        |
| 12        | 0,00050        | 0,99950        | 0,70138        | 988654        | 494,327        | 693421,8        | 19648930        | 4,46E+08        | 336,6125        |
| 13        | 0,00051        | 0,99949        | 0,68095        | 988159        | 503,961        | 672888,4        | 18955508        | 4,26E+08        | 333,1778        |
| 14        | 0,00052        | 0,99948        | 0,66112        | 987655        | 513,581        | 652956,6        | 18282620        | 4,07E+08        | 329,648         |
| 15        | 0,00054        | 0,99946        | 0,64186        | 987142        | 533,057        | 633608,8        | 17629663        | 3,89E+08        | 332,1832        |
| 16        | 0,00055        | 0,99945        | 0,62317        | 986609        | 542,635        | 614822          | 16996055        | 3,71E+08        | 328,303         |

$$C_5 = v^{5+1}(l_5 - l_6) = q_5 l_5 (v^6)$$

$$C_{10} = v^{10+1}(l_{10} - l_{11}) = q_{10} l_{10} v^{11}$$

# Funções de comutação- $C_x$

|    | A  | B       | C       | D        | E        | F        | G           | H           | I         | J | K | L                    | M  |
|----|----|---------|---------|----------|----------|----------|-------------|-------------|-----------|---|---|----------------------|----|
| 1  | x  | qx      | px      | lx       | vx       | Dx       | Nx          | Sx          | Cx        |   |   |                      |    |
| 2  | 0  | 0,00231 | 0,99769 | 100000   | 1        | 100000   | 2031767,454 | 39001334,26 | =B2*D2*E3 |   |   |                      |    |
| 3  | 1  | 0,00091 | 0,99909 | 99768,9  | 0,952381 | 95018    | 1931767,454 | 36969566,81 | 81,98696  |   |   |                      |    |
| 4  | 2  | 0,00050 | 0,99950 | 99678,51 | 0,907029 | 90411,35 | 1836749,454 | 35037799,36 | 43,39745  |   |   | Fator de atualização |    |
| 5  | 3  | 0,00041 | 0,99959 | 99628,27 | 0,863838 | 86062,65 | 1746338,107 | 33201049,9  | 33,44149  |   |   | i                    | 5% |
| 6  | 4  | 0,00036 | 0,99964 | 99587,62 | 0,822702 | 81930,98 | 1660275,46  | 31454711,8  | 27,85653  |   |   |                      |    |
| 7  | 5  | 0,00032 | 0,99968 | 99552,07 | 0,783526 | 78001,65 | 1578344,477 | 29794436,34 | 24,06908  |   |   |                      |    |
| 8  | 6  | 0,00030 | 0,99970 | 99519,82 | 0,746215 | 74263,22 | 1500342,825 | 28216091,86 | 21,28879  |   |   |                      |    |
| 9  | 7  | 0,00029 | 0,99971 | 99489,86 | 0,710681 | 70705,59 | 1426079,606 | 26715749,04 | 19,25885  |   |   |                      |    |
| 10 | 8  | 0,00033 | 0,99967 | 99461,41 | 0,676839 | 67319,39 | 1355374,02  | 25289669,43 | 21,0293   |   |   |                      |    |
| 11 | 9  | 0,00036 | 0,99964 | 99428,78 | 0,644609 | 64092,68 | 1288054,625 | 23934295,41 | 22,09671  |   |   |                      |    |
| 12 | 10 | 0,00039 | 0,99961 | 99392,79 | 0,613913 | 61018,55 | 1223961,946 | 22646240,78 | 22,66403  |   |   |                      |    |
| 13 | 11 | 0,00041 | 0,99959 | 99354,03 | 0,584679 | 58090,24 | 1162943,395 | 21422278,84 | 22,84883  |   |   |                      |    |
| 14 | 12 | 0,00043 | 0,99957 | 99312,99 | 0,556837 | 55301,19 | 1104853,154 | 20259335,44 | 22,69982  |   |   |                      |    |
| 15 | 13 | 0,00045 | 0,99955 | 99270,19 | 0,530321 | 52645,1  | 1049551,963 | 19154482,29 | 22,36163  |   |   |                      |    |
| 16 | 14 | 0,00046 | 0,99954 | 99225,91 | 0,505068 | 50115,83 | 996906,8625 | 18104930,33 | 21,86005  |   |   |                      |    |
| 17 | 15 | 0,00047 | 0,99953 | 99180,47 | 0,481017 | 47707,5  | 946791,0329 | 17108023,46 | 21,35479  |   |   |                      |    |
| 18 | 16 | 0,00048 | 0,99952 | 99133,85 | 0,458112 | 45414,36 | 899083,5315 | 16161232,43 | 20,8041   |   |   |                      |    |
| 19 | 17 | 0,00050 | 0,99951 | 99085,17 | 0,436807 | 43220,07 | 852660,1707 | 15220110,0  | 20,28221  |   |   |                      |    |

$$C_{10} = v^{10+1} q_{10} l_{10}$$

# Funções de comutação- $M_x$

➤ Coluna  $M_x$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{\omega-x} = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}$$

$$M_x = v^{x+1}q_xl_x + v^{x+2}q_{x+1}l_{x+1} + v^{x+3}q_{x+2}l_{x+2} + \cdots$$

# Funções de comutação- $M_x$

|     | A   | B       | C       | D        | E        | F        | G           | H        | I        | J | K | L | M | N | O |
|-----|-----|---------|---------|----------|----------|----------|-------------|----------|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1   | x   | qx      | px      | lx       | vx       | Dx       | Nx          | Cx       | Mx       |   |   |   |   |   |   |
| 89  | 87  | 0,09696 | 0,90304 | 36000,82 | 0,014339 | 516,2302 | 2909,279962 | 47,66919 |          |   |   |   |   |   |   |
| 90  | 88  | 0,10563 | 0,89437 | 32510,26 | 0,013657 | 443,9786 | 2393,049748 | 44,66467 |          |   |   |   |   |   |   |
| 91  | 89  | 0,11486 | 0,88514 | 29076,17 | 0,013006 | 378,1721 | 1949,071114 | 41,36771 |          |   |   |   |   |   |   |
| 92  | 90  | 0,12461 | 0,87539 | 25736,53 | 0,012387 | 318,7962 | 1570,898994 | 37,83413 |          |   |   |   |   |   |   |
| 93  | 91  | 0,13486 | 0,86514 | 22529,45 | 0,011797 | 265,7813 | 1252,102778 | 34,1367  |          |   |   |   |   |   |   |
| 94  | 92  | 0,14558 | 0,85443 | 19491,11 | 0,011235 | 218,9884 | 986,3214621 | 30,36117 |          |   |   |   |   |   |   |
| 95  | 93  | 0,15673 | 0,84327 | 16653,69 | 0,0107   | 178,1992 | 767,3330982 | 26,59869 |          |   |   |   |   |   |   |
| 96  | 94  | 0,16829 | 0,83171 | 14043,61 | 0,010191 | 143,1148 | 589,1339241 | 22,9379  |          |   |   |   |   |   |   |
| 97  | 95  | 0,18025 | 0,81976 | 11680,21 | 0,009705 | 113,3619 | 446,0191126 | 19,45992 |          |   |   |   |   |   |   |
| 98  | 96  | 0,19257 | 0,80744 | 9574,91  | 0,009243 | 88,50381 | 332,6571889 | 16,23118 |          |   |   |   |   |   |   |
| 99  | 97  | 0,20523 | 0,79477 | 7731,117 | 0,008803 | 68,05817 | 244,1533757 | 13,30239 |          |   |   |   |   |   |   |
| 100 | 98  | 0,21868 | 0,78132 | 6144,468 | 0,008384 | 51,51491 | 176,0952078 | 10,72899 |          |   |   |   |   |   |   |
| 101 | 99  | 0,23337 | 0,76663 | 4800,777 | 0,007985 | 38,33284 | 124,5802952 | 8,519783 |          |   |   |   |   |   |   |
| 102 | 100 | 0,24974 | 0,75026 | 3680,415 | 0,007604 | 27,98768 | 86,24746001 | 6,65683  |          |   |   |   |   |   |   |
| 103 | 101 | 0,26824 | 0,73176 | 2761,264 | 0,007242 | 19,9981  | 58,25978086 | 5,108792 |          |   |   |   |   |   |   |
| 104 | 102 | 0,28931 | 0,71070 | 2020,591 | 0,006897 | 13,93702 | 38,26167783 | 3,840047 | 12,11497 |   |   |   |   |   |   |
| 105 | 103 | 0,31339 | 0,68661 | 1436,024 | 0,006569 | 9,433306 | 24,32465701 | 2,815536 | 8,274926 |   |   |   |   |   |   |
| 106 | 104 | 0,34094 | 0,65906 | 985,987  | 0,006256 | 6,168564 | 14,89135129 | 2,002962 | 5,45939  |   |   |   |   |   |   |
| 107 | 105 | 0,37240 | 0,62760 | 649,8246 | 0,005958 | 3,871861 | 8,722786896 | 1,373213 | 3,456427 |   |   |   |   |   |   |
| 108 | 106 | 0,40821 | 0,59179 | 407,8312 | 0,005675 | 2,314274 | 4,850925899 | 0,899724 | 2,083215 |   |   |   |   |   |   |
| 109 | 107 | 0,44882 | 0,55118 | 241,3504 | 0,005404 | 1,304347 | 2,536651893 | 0,557544 | 1,183491 |   |   |   |   |   |   |
| 110 | 108 | 0,49468 | 0,50532 | 133,0268 | 0,005147 | 0,684691 | 1,232305022 | 0,322575 | 0,625947 |   |   |   |   |   |   |
| 111 | 109 | 0,54623 | 0,45377 | 67,22098 | 0,004902 | 0,329512 | 0,547613599 | 0,171419 | 0,303372 |   |   |   |   |   |   |
| 112 | 110 | 0,60392 | 0,39608 | 30,5028  | 0,004668 | 0,142402 | 0,218101612 | 0,081904 | 0,131954 |   |   |   |   |   |   |
| 113 | 111 | 0,66819 | 0,33181 | 12,08164 | 0,004446 | 0,053717 | 0,075699399 | 0,034184 | 0,05005  |   |   |   |   |   |   |
| 114 | 112 | 0,73948 | 0,26052 | 4,008857 | 0,004234 | 0,016975 | 0,021982164 | 0,011955 | 0,015866 |   |   |   |   |   |   |
| 115 | 113 | 0,81825 | 0,18175 | 1,044375 | 0,004033 | 0,004212 | 0,005006802 | 0,003282 | 0,003911 |   |   |   |   |   |   |
| 116 | 114 | 0,90495 | 0,09506 | 0,189811 | 0,003841 | 0,000729 | 0,000795021 | 0,000628 | 0,000628 |   |   |   |   |   |   |
| 117 | 115 | 1,00000 | 0,00000 | 0,018042 | 0,003658 | 6,6E-05  | 6,59974E-05 | 0        | 0        |   |   |   |   |   |   |
| 118 |     |         |         |          |          |          |             |          |          |   |   |   |   |   |   |

$$M_{102} = C_{102} + [C_{103} + \dots + C_{115}]$$



$$M_{114} = C_{114} + C_{115}$$



$$M_{115} = C_{115}$$



# Funções de comutação- $R_x$

➤ Coluna  $R_x$

$$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} M_{x+t} = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_{\omega-x}$$

*A utilização de  $R_x$  pertence ao cálculo de seguro contra morte de capital crescente, ...*

# Funções de comutação

|    | A  | B       | C       | D        | E        | F        | G           | H           | I        | J        | K        | L                    | M  |
|----|----|---------|---------|----------|----------|----------|-------------|-------------|----------|----------|----------|----------------------|----|
| 1  | x  | qx      | px      | lx       | vx       | Dx       | Nx          | Sx          | Cx       | Mx       | Rx       |                      |    |
| 2  | 0  | 0,00231 | 0,99769 | 100000   | 1        | 100000   | 2031767,454 | 39001334,26 | 220,0952 | 3249,169 | 174561,1 |                      |    |
| 3  | 1  | 0,00091 | 0,99909 | 99768,9  | 0,952381 | 95018    | 1931767,454 | 36969566,81 | 81,98696 | 3029,074 | 171311,9 |                      |    |
| 4  | 2  | 0,00050 | 0,99950 | 99678,51 | 0,907029 | 90411,35 | 1836749,454 | 35037799,36 | 43,39745 | 2947,087 | 168282,8 | Fator de atualização |    |
| 5  | 3  | 0,00041 | 0,99959 | 99628,27 | 0,863838 | 86062,65 | 1746338,107 | 33201049,9  | 33,44149 | 2903,689 | 165335,7 | i                    | 5% |
| 6  | 4  | 0,00036 | 0,99964 | 99587,62 | 0,822702 | 81930,98 | 1660275,46  | 31454711,8  | 27,85653 | 2870,248 | 162432   |                      |    |
| 7  | 5  | 0,00032 | 0,99968 | 99552,07 | 0,783526 | 78001,65 | 1578344,477 | 29794436,34 | 24,06908 | 2842,391 | 159561,8 |                      |    |
| 8  | 6  | 0,00030 | 0,99970 | 99519,82 | 0,746215 | 74263,22 | 1500342,825 | 28216091,86 | 21,28879 | 2818,322 | 156719,4 |                      |    |
| 9  | 7  | 0,00029 | 0,99971 | 99489,86 | 0,710681 | 70705,59 | 1426079,606 | 26715749,04 | 19,25885 | 2797,033 | 153901,1 |                      |    |
| 10 | 8  | 0,00033 | 0,99967 | 99461,41 | 0,676839 | 67319,39 | 1355374,02  | 25289669,43 | 21,0293  | 2777,774 | 151104   |                      |    |
| 11 | 9  | 0,00036 | 0,99964 | 99428,78 | 0,644609 | 64092,68 | 1288054,625 | 23934295,41 | 22,09671 | 2756,745 | 148326,3 |                      |    |
| 12 | 10 | 0,00039 | 0,99961 | 99392,79 | 0,613913 | 61018,55 | 1223961,946 | 22646240,78 | 22,66403 | 2734,648 | 145569,5 |                      |    |
| 13 | 11 | 0,00041 | 0,99959 | 99354,03 | 0,584679 | 58090,24 | 1162943,395 | 21422278,84 | 22,84883 | 2711,984 | 142834,9 |                      |    |
| 14 | 12 | 0,00043 | 0,99957 | 99312,99 | 0,556837 | 55301,19 | 1104853,154 | 20259335,44 | 22,69982 | 2689,136 | 140122,9 |                      |    |
| 15 | 13 | 0,00045 | 0,99955 | 99270,19 | 0,530321 | 52645,1  | 1049551,963 | 19154482,29 | 22,36163 | 2666,436 | 137433,8 |                      |    |
| 16 | 14 | 0,00046 | 0,99954 | 99225,91 | 0,505068 | 50115,83 | 996906,8625 | 18104930,33 | 21,86005 | 2644,074 | 134767,3 |                      |    |
| 17 | 15 | 0,00047 | 0,99953 | 99180,47 | 0,481017 | 47707,5  | 946791,0329 | 17108023,46 | 21,35479 | 2622,214 | 132123,2 |                      |    |
| 18 | 16 | 0,00048 | 0,99952 | 99133,85 | 0,458112 | 45414,36 | 899083,5315 | 16161232,43 | 20,8041  | 2600,859 | 129501   |                      |    |
| 19 | 17 | 0,00050 | 0,99951 | 99086,17 | 0,436297 | 43230,97 | 853669,1707 | 15262148,9  | 20,38031 | 2580,055 | 126900,2 |                      |    |
| 20 | 18 | 0,00051 | 0,99949 | 99037,12 | 0,415521 | 41151,97 | 810438,2026 | 14408479,73 | 19,9881  | 2559,675 | 124320,1 |                      |    |
| 21 | 19 | 0,00053 | 0,99947 | 98986,61 | 0,395734 | 39172,36 | 769286,2323 | 13598041,53 | 19,6981  | 2539,687 | 121760,4 |                      |    |
| 22 | 20 | 0,00055 | 0,99945 | 98934,35 | 0,376889 | 37287,32 | 730113,8678 | 12828755,29 | 19,49594 | 2519,989 | 119220,8 |                      |    |
| 23 | 21 | 0,00057 | 0,99943 | 98880,00 | 0,359510 | 35700,00 | 692225,5500 | 12082222,11 | 19,30000 | 2500,000 | 116700,0 |                      |    |

# Funções de comutação

$$D_x = l_x v^x$$

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{(x+t)}$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}$$

$$S_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} N_{x+t}$$

$$R_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} M_{x+t}$$



- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

