Matemática atuarial

AULA 20 - Prêmios Periódicos (Seguros)

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

- Notas de aula da disciplina Matemática Atuarial I, oferecida pelo curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia/ Ciências atuariais da Universidade federal de Alfenas- Campus Varginha.

PIRES,M.D. COSTA, L,H. Prêmios nivelados. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Economia, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_MatAtuarial1.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Prêmios

- O prêmio poderá ser pago de 3 formas:
  - Um único pagamento.
    - Valor esperado da função valor presente.
    - Valor atuarial.
  - Prêmios periódicos de valor constante no tempo (prêmios nivelados).
  - Prêmios periódicos de quantidade variável.

- Princípio básico que governa qualquer seguro é a equivalência.
  - O compromisso da seguradora (gastos com benefícios) deve ser equivalente ao valor das contribuições individuais (pagamento de prêmios).

Prêmio Puro periódico Anual

A ideia básica do princípio da equivalência é que, uma os compromissos da seguradora e o segurado a data $\mathbf{0}$, determinamos uma função perda "L“, tal que:

$$L = Compromissos\ com\ benefícios - Compromissos\ com\ prêmios$$

Esperamos que $E(L) = \mathbf{0}$, logo

$$E(Compromissos\ com\ benefícios) = E(Compromissos\ com\ prêmios)$$

Exemplo: Seja um seguro de vida vitalício feito por uma pessoa de x anos, então os compromisso (a data 0) do segurado e da seguradora são dados por:

$$Compromisso\ com\ benefício$$

$$Z_{T_x} = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$Compromisso\ com\ prêmio$$

$$Y = P$$

Logo

$$E(Compromissos\ com\ benefícios) = E(Compromissos\ com\ prêmios)$$

$$E(v^{T+1}) = E(P)$$

$$P = A_x$$

P é o valor do prêmio puro único.

Prêmio Puro periódico Anual

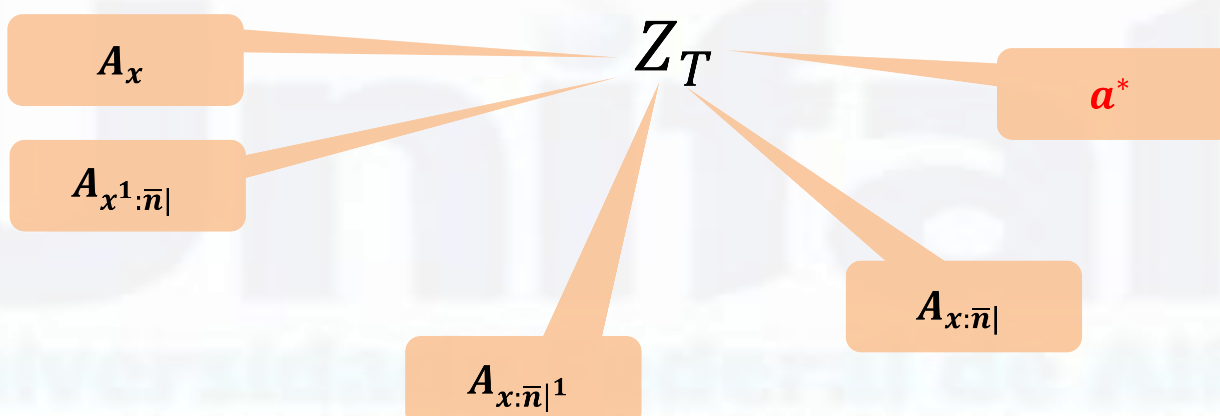
Considere um contrato que estipula que o segurado deverá pagar uma série de prêmios constantes iguais a ***P*** (nivelado) no início de cada ano enquanto o segurado sobreviver. Logo o valor presente do compromisso desse segurado é descrito pela variável aleatória Y, tal que:

$$Y = P + Pv + Pv^2 + \ldots Pv^k = P\left(1 + v + v^2 \ldots + v^{k-1} + v^k\right)$$

$$Y = P\left(\frac{1 - v^{k+1}}{1 - v}\right) = P\ddot{a}_{\overline{k+1|}}$$

Prêmio Puro periódico Anual

Por outro lado o valor presente do benefício que será pago pela seguradora por uma dada modalidade de seguro é representado por Z_T. Então, o compromisso em valor presente do **SEGURADOR** é:



Prêmio Puro periódico Anual

A ideia básica do cálculo do valor de P, está em igualar o compromisso do segurado ao compromisso do segurador, a data 0. Tal que:

$$L = \text{Compromisso do segurador} - \text{Compromissos do segurado}$$

$$L = Z_T - Y$$

Princípio da Equivalência, $E(L) = 0$

$$E(L) = 0 = E(Z_T - Y)$$

$$E(Z_T) = E(Y)$$

Prêmio Puro periódico Anual

$$E(Y) = E(Z_T)$$

$$E\left(P\ddot{a}_{\overline{K+1|}}\right) = E\left(Z_{T_x}\right)$$

Dado que $\ddot{a}_{\overline{K+1|}}, K \geq 0$, então:

$$P\ddot{a}_x = E\left(Z_{T_x}\right)$$

$$P = \frac{E\left(Z_{T_x}\right)}{\ddot{a}_x}$$

Prêmio Puro periódico Anual-A_x

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$\boldsymbol{A_x = v\ddot{a}_x - a_x} \text{ e } \boldsymbol{\ddot{a}_x = a_x + 1}$$

$$P_x = \frac{(1-v)A_x}{1-A_x}$$

EXEMPLO 1: Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio puro (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}}$$

EXEMPLO 1: Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de vida vitalício com benefício igual a 1 pago ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 3% ao ano. Qual será o valor do prêmio puro (parcela) a ser pago anualmente pelo segurado?

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}}$$

$$A_{25} = \frac{M_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{0,2492899} \quad \ddot{a}_{25} = \frac{N_{25}}{D_{25}} \approx \mathbf{25,77438}9 \quad v \approx 0{,}9708738$$

$$P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25}} \approx 0{,}00967 \qquad P_{25} = \frac{(1-v)A_{25}}{1-A_{25}} \approx 0{,}00967$$

EXEMPLO 1: Caso o segurado queira que o beneficiário receba $R\$1000{,}00$ neste seguro de vida inteira, então:

$$1000P_{25} = 1000(0{,}00967)$$

$$1000P_{25} = R\$\,9{,}67$$

Prêmio Puro periódico Anual-A_x

pagamentos limitados

No caso dos pagamentos estarem limitados a um período $k < \omega - x$, tem-se:

$$_kP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Número de pagamentos

EXEMPLO 2: Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?

EXEMPLO 2: Caso fosse estipulado que no exemplo 1 o seguro fosse pago em 4 parcelas anuais, qual seria o valor das parcelas?

$$ {}_4P_{25} = \frac{A_{25}}{\ddot{a}_{25:\overline{4|}}} = \frac{0{,}24929}{3{,}82415} \approx 0{,}06519 $$

Prêmio Puro periódico Anual- $A_{x^1:\bar{n}|}$

$$P_{x^1:\overline{k}|} = \frac{A_{x^1:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{k}|}}$$

EXEMPLO 3: Qual o valor do prêmio puro anual pago durante a vigência de um seguro com cobertura de 5 anos, feito por uma pessoa de 40 anos de idade? Considere a tábua AT-49 e uma taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 3:

$$A_{40^1:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{t+1}{}_{t}p_{40}q_{40+t} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|} = \sum_{t=0}^{4} v^{t}{}_{t}p_{40} = \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}}$$

$$P_{40^1:\overline{5}|} = \frac{A_{40^1:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}} \approx 0{,}002452$$

Prêmio Puro periódico Anual

A teoria até agora nos levou ao cálculo do Prêmio nivelado a ser pago pelo segurado uma vez escolhido o valor do benefício. Pensemos agora na seguinte situação:

Um segurado procura está disposto a pagar anualmente um dado valor de prêmio, este segurado gostaria então de saber qual o benefício ele poderá contratar por este valor.

Prêmio Puro periódico Anual

Neste caso, conhecemos o valor do Prêmio nivelado (puro), porém, não conhecemos o valor do benefício a ser pago.

> ...não estamos querendo calcular o prêmio que, em média seja o suficiente para pagamento de sinistros.

EXEMPLO 4: Um segurado de 40 anos quer comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado se propõe a pagar por 5 anos um prêmio de $0,003 a contar do dia do contrato. Qual deverá ser o benefício contratado nesse seguro? Use a tábua $AT-49$ e uma taxa de juros de 3% ao ano.

EXEMPLO 4 -Solução

$$Z_{T_{40}} = \begin{cases} bv^{T+1} & se\ 0 \leq T < 5 \\ 0 & se \quad T > 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = \begin{cases} 0{,}003\ \ddot{a}_{\overline{T_x|}} & se\ 0 \leq T < 5 \\ 0{,}003\ \ddot{a}_{\overline{5}|} & se \quad T \geq 5 \end{cases}$$

Valor de $P_{40^1:\overline{5}|}$ é conhecido. Então:

$$b = \frac{0{,}003\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}{A_{40^1:\overline{5}|}} = \frac{0{,}003(4{,}696544)}{0{,}0115156} \approx 1{,}22$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

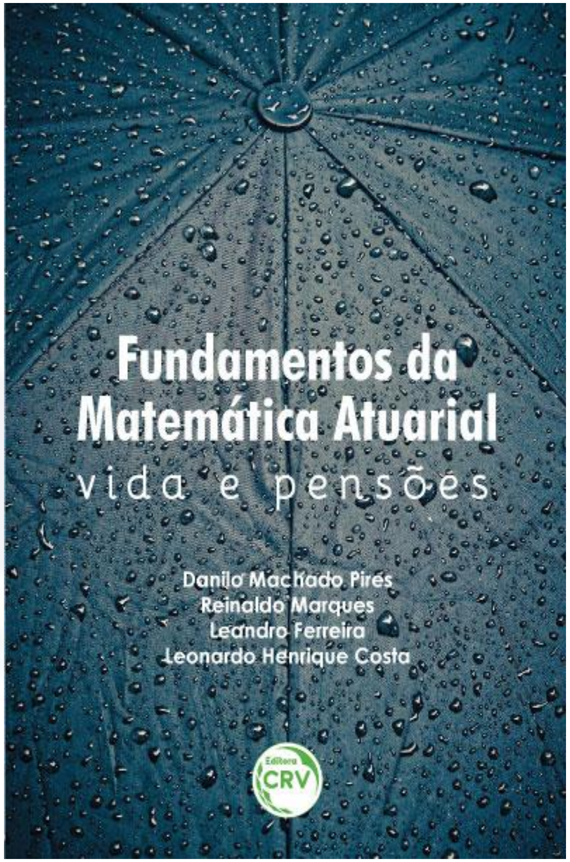
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.



Aula 21

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

Seja uma pessoa de 40 anos que queira pagar por um seguro vitalício que paga 1 *u.m.* Considerando a tábua de mortalidade AT-49 masculina. Responda aos itens abaixo, usando a tabela de comutação (3%).

a) Calcule o prêmio puro único a ser pago pelo segurado?

b) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante toda a vigência do seguro?

c) Qual o valor da parcela do prêmio a ser pago pelo segurado, considerando pagamentos nivelados durante 15 anos?

d) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato um prêmio fixo. Qual o valor da parcela do Prêmio a ser pago pelo segurado?

e) Seja uma pessoa de 22 anos que queira comprar um seguro de vida temporário por 5 anos com benefício de $R\$50000,00$. Qual o valor da parcela do Prêmio puro a ser pago pelo segurado, para o caso excepcional, do segurado poder pagar por 10 anos?

f) Seja um segurado com 50 anos de idade que decide fazer um seguro dotal puro que paga R$ 250 mil se o segurado sobreviver durante o período de 3 anos. Qual deverá ser o Prêmio Puro Único pago pelo segurado?

Prêmio Puro periódico Anual fracionado

Esses prêmios podem ser pagos de forma fracionadas ao longo do ano.

$$P_x^{(m)} = \frac{E\left(Z_{T_x}\right)}{m\,\ddot{a}_{x:\bar{k}|}^{(m)}}$$

Lembrando que:

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} \approx \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - (1 - {}_n p_x v^n)\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

EXEMPLO 1: Uma pessoa de 40 anos decide adquirir um seguro de vida temporário por 5 anos. Para isso, o segurado deseja pagar durante a vigência do contrato, um prêmio fixo mensal. Qual o valor do prêmio puro a ser pago pelo segurado, considerando a tábua AT-49 e uma taxa de juros 3% ao ano?

SOLUÇÃO

$$A_{40^1:\overline{5}|} = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)} \approx \frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}} - (1 - {}_5\, p_{40} v^5) \left(\frac{12 - 1}{2 \times 12}\right)$$

$$P_{40^1:\overline{5}|}^{(12)} = \frac{A_{40^1:\overline{5}|}}{12\ddot{a}_{40:\overline{5}|}^{(12)}} \approx 0{,}0002$$

O valor pago mensalmente é 0,0002

Planos	Prêmio Puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo.	$P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	${}_kP_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k\vert}}}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$P_{x^1:\overline{n\vert}} = \dfrac{A_{x^1:\overline{n\vert}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n\vert}}}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n\vert}^{\,1}} = \dfrac{A_{x:\overline{n\vert}^{\,1}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n\vert}}}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$P_{x:\overline{n\vert}} = \dfrac{A_{x:\overline{n\vert}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n\vert}}}$
...	

Exemplo 2: Um segurado adquire um seguro dotal misto que funciona da seguinte forma:

- Caso o segurado sobreviva ao período de $\boldsymbol{n}$ anos, então a seguradora irá pagar 1 u.m..
- Caso o segurado faleça neste período, a seguradora irá pagar 85% da quantidade de prêmios pelo pagos segurado (considerando P por cada prêmio pago, sem capitalização) ao final do ano de morte.

Qual deverá ser o prêmio pago durante toda a vigência desse seguro considerando que o segurado tem hoje 50 anos e deseja um seguro de 15 anos de vigência , podemos modelar seu tempo de vida adicional por uma AT-49 e a seguradora se compromete a pagar uma taxa de juros anual de 5%?

Exemplo 2:

É necessário achar um prêmio tal que $E(L) = 0$

- Segurado (Y)

$$Y = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T|}} \ \ se\ 0 < T < 15 \\ P\ \ddot{a}_{\overline{15|}} \ \ se\ T \geq 15 \end{cases}$$

$$\mathrm{E(Y)} = P\ddot{a}_{50:\overline{15|}} = P\sum_{t=0}^{15-1} \boldsymbol{v^t}\ {}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{p_{50}}$$

Exemplo 2:

É necessário achar um prêmio tal que $E(L) = 0$

➤ Segurador (Z)

Caso $t = 0$ então a seguradora deve ter hoje $0.85(Pv)$

Caso $t = 1$ então a seguradora deve ter hoje $0.85(2P)v^2$

Caso $t = 2$ então a seguradora deve ter hoje $0.85(3P)v^3$

...

Caso $t = n$ então a seguradora deve ter hoje $0.85(n+1)Pv^{n+1}$

$$Z = \begin{cases} 0{,}85(t+1)Pv^{(t+1)} & se \ \ t = 0,1,2,\ldots,14 \\ v^{15} & se \ \ t \geq 15 \end{cases}$$

$P(T = t)$

$$E(Z) = 0{,}85P\sum_{t=0}^{14}(t+1)v^{t+1} \ {}_tp_{50}q_{50+t} + v^{15} \ {}_{15}p_{50}$$

Exemplo 2:

É necessário achar um prêmio tal que $E(L) = 0$

$$E(Y) = E(Z)$$

$$P\sum_{t=0}^{14} \boldsymbol{v^t}\ {}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{p_{50}} = 0{,}85P\sum_{t=0}^{14}(t+1)v^{t+1}\ {}_tp_{50}q_{50+t} + v^{15}\ {}_{15}p_{50}$$

$$P = \frac{v^{15}\ {}_{15}p_{50}}{\sum_{t=0}^{14} \boldsymbol{v^t}\ {}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{p_{50}} - 0{,}85\sum_{t=0}^{14}(t+1)v^{t+1}\ {}_tp_{50}q_{50+t}}$$

Exemplo 2:

$$P = \frac{v^{15}\ {}_{15}p_{50}}{\sum_{t=0}^{14} v^t\ {}_t p_{50} - 0{,}85 \sum_{t=0}^{14} (t+1) v^{t+1}\ {}_t p_{50}\, q_{50+t}}$$

$$P = \frac{0{,}395383}{10{,}26667 - (0{,}85)0{,}9709197}$$

$$P = \frac{0{,}395383}{9{,}441388} = 0{,}041877$$

Lista (entregar) Considere AT-49 e $i = 3\%$

1) Considere quem uma pessoa de 40 anos contrate um seguro de vida temporário por 5 anos e para isso irá pagar um prêmio puro ao longo de toda a cobertura, qual o valor desse prêmio?

2) Considere os dados da questão 1 calcule o quanto é a diferença dos compromisso da seguradora e o compromisso do segurado, ano a ano .

$$A_{40^1:\overline{5}|} - P_{40^1:\overline{5}|}\left(\ddot{a}_{40:\overline{5}|}\right) = 0 \ \rightarrow data\ 0$$

$$A_{41^1:\overline{4}|} - P_{40^1:\overline{5}|}\left(\ddot{a}_{41:\overline{4}|}\right) = ? \quad \rightarrow após\ 1\ ano$$

$$A_{42^1:\overline{3}|} - P_{40^1:\overline{5}|}\left(\ddot{a}_{42:\overline{3}|}\right) =? \rightarrow após\ 2\ anos$$

$$A_{43^1:\overline{2}|} - P_{40^1:\overline{5}|}\left(\ddot{a}_{43:\overline{2}|}\right) =? \rightarrow após\ 3\ anos$$

$$A_{44^1:\overline{1}|} - P_{40^1:\overline{5}|}\left(\ddot{a}_{44:\overline{1}|}\right) =? \rightarrow após\ 4\ anos$$

Considere os dados da questão 1 calcule o quanto é a diferença dos compromisso da seguradora e o compromisso do segurado, ano a ano.

$$A_{40^1:\overline{5}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{40:\overline{5}|}) = 0 \rightarrow data\ 0$$

$$P_{40^1:\overline{5}|} \approx 0{,}002452$$

$$A_{41^1:\overline{4}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{41:\overline{4}|}) \approx 0{,}000497 \quad \rightarrow após\ 1\ ano$$

$$A_{42^1:\overline{3}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{42:\overline{3}|}) \approx 0{,}000819 \rightarrow após\ 2\ anos$$

$$A_{43^1:\overline{2}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{43:\overline{2}|}) \approx 0{,}000891 \rightarrow após\ 3\ anos$$

$$A_{44^1:\overline{1}|} - P_{40^1:\overline{5}|}(\ddot{a}_{44:\overline{1}|}) \approx 0{,}000645 \rightarrow após\ 4\ anos$$

Exemplo 3: Considere que uma pessoa de 40 anos contrate um seguro de vida vitalício. Qual o valor do prêmio puro pago ao longo de 11 anos? Use a tábua AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

Exemplo 4 Calcule o quanto é a diferença dos compromissos da seguradora e os compromissos do segurado dado que passaram-se 10 e 15 anos.

Exemplo 3: Considere que uma pessoa de 40 anos contrate um seguro de vida vitalício. Qual o valor do prêmio puro pago ao longo de 11 anos? Use a tábua AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

$$ {}_{11}P_{40} = \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{11}|}} \approx 0{,}03974 $$

Exemplo 4: Calcule o quanto é a diferença dos compromissos da seguradora e os compromissos do segurado dado que passaram-se 10 e 15 anos.

$$ A_{50} - {}_{11}P_{40}\left(\ddot{a}_{50:\overline{1}|}\right) \approx 0{,}4953 $$

$$ A_{55} \approx 0{,}5350 $$

PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO

Planos	Prêmio puro
Seguro vitalício-prêmios pagos enquanto o segurado estiver vivo	$\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Seguro vitalício-prêmios pagos durante k anos.	${}_k\bar{P}_x = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{k}\vert}}$
Seguro temporário-prêmios pagos durante toda cobertura	$\bar{P}_{x^1:\overline{n}\vert} = \dfrac{\bar{A}_{x^1:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Seguro dotal puro- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}\vert^1} = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert^1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
Seguro dotal misto- prêmios pagos durante toda a cobertura.	$\bar{P}_{x:\overline{n}\vert} = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\vert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
...	

EXEMPLO 5: Considere que um indivíduo de idade x, decida fazer um seguro de vida temporário por 10 anos, que pague um benefício unitário no momento da morte do segurado. Dado que o tempo de vida adicional possa ser modelado pela distribuição exponencial, $T_x \sim Exp(0{,}02)$, calcule o prêmio $\bar{P}_{x^1:\overline{10|}}$ anual, que deverá ser pago pelo segurado. Considere $\delta = 0{,}06$.

EXEMPLO 5

$$\bar{P}_{x^1:\overline{10}|} = \frac{\bar{A}_{x^1:\overline{10}|}}{\bar{a}_{x:10|}},$$

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} = \int_0^{10} \frac{\left(1-e^{-\delta t}\right)}{\delta} \alpha e^{-\alpha t} dt + \frac{\left(1-e^{-\delta 10}\right)}{\delta} e^{-\alpha 10}$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{10}|} = \int_0^{10} e^{-\delta t} \alpha e^{-\alpha t} dt$$

Após resolver as integrais acima e substituir $\delta = 0{,}06$ e $\alpha = 0{,}02$.

$$\bar{a}_{x:\overline{10}|} \approx 6{,}8834$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{10}|} \approx 0{,}13766$$

$$\bar{P}_{x^1:\overline{10}|} \approx \frac{0{,}13766}{6{,}8834} \approx 0{,}01999$$

Relações importantes

$$\bar{P}_x = \frac{i}{\delta} P_x$$

$$\bar{P}_{x^1:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|}$$

$$\bar{P}_{x:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta} P_{x^1:\bar{n}|} + P_{x:\overline{n|}^1}$$

PRÊMIO PURO PARA O SEGURO DE VIDA PAGO NO MOMENTO DA MORTE DO SEGURADO

A busca do valor da parcela do prêmio através do princípio da equivalência, estabelece uma paridade entre os gastos do segurado e da seguradora. Contudo ...

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P\left(Z_{T_x} > Y\right) = \epsilon$$

Prêmio Puro periódico Anual

Como $L = Z_{T_x} - Y$ para o caso em que trata-se do prêmio relacionado seguros de vida, tem-se:

$$P(L > 0) = \epsilon$$

$$P\left(be^{-\delta T} > \bar{P}\left(\frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}\right)\right) = \epsilon$$

$$P\left(\delta be^{-\delta T} > \bar{P}\left(1 - e^{-\delta T}\right)\right) = \epsilon$$

Prêmio Puro periódico Anual

$$P\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} > e^{\delta T}\left(1 - e^{-\delta T}\right)\right) = \epsilon$$

$$P\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1 > e^{\delta T}\right) = \epsilon$$

$$P\left(ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right) > \delta T\right) = \epsilon$$

$$P\left(\frac{ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)}{\delta} > T\right) = \epsilon$$

$$P\left(T < \frac{ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)}{\delta}\right) = \epsilon$$

$$\frac{ln\left(\frac{\delta b}{\bar{P}} + 1\right)}{\delta} = t_\epsilon$$

$$\bar{P} = \frac{\delta b}{e^{\delta t_\epsilon} - 1}$$

Prêmios Anuidades

- Em seguros, os prêmios são pagos durante o período de cobertura.

- Em anuidades, especialmente diferidas, os prêmios são geralmente pagos no período anterior ao início dos recebimentos do benefício..

Prêmios Anuidades

A função perda, L, da seguradora que relaciona os compromissos do segurado com os pagamentos dos prêmios e o compromisso da seguradora com os pagamentos de benefícios é dada por:

$$L = Y_b - Y_p$$

$$Y_p = \begin{cases} P\ddot{a}_{\overline{T_x+1}|} & T = 0,1,2,\ldots.,k-1 \\ P\ddot{a}_{\overline{k}|} & T = k, k+1, \ldots \end{cases}$$: compromisso do segurado por k anos,

Y_b: compromisso da seguradora (alguma modalidade de anuidade diferida).

$$E(L) = 0$$

$$P(Y_b) = \frac{E(Y_b)}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Prêmios Anuidades

Planos	Prêmio puro
Anuidade antecipada vitalícia, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\vert}\ddot{a}_x\right) = \dfrac{{}_{k\vert}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\vert}}$
Anuidade antecipada vitalícia diferida por n anos, com prêmios limitados a k anos. $(k \leq n)$	$P\left({}_{n\vert}\ddot{a}_x\right)_k = \dfrac{{}_{n\vert}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\vert}}$
Anuidade antecipada temporária , com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}\right) = \dfrac{{}_{k\vert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\vert}}$
Anuidade antecipada vitalícia fracionada, com prêmios pagos durante todo período de diferimento.	$P\left({}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}\right) = \dfrac{{}_{k\vert}\ddot{a}_x^{(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\vert}^{(m)}}$
...	

EXEMPLO 6: Suponha que uma pessoa de *18* anos que acabou de começar a trabalhar pretende contribuir mensalmente por um período de *33* anos para sua aposentadoria (que também será mensal e vitalícia). Qual deverá ser o valor pago por essa pessoa, considerando que ela pretende aposentar com uma renda fixa de $10000,00 e que a seguradora trabalha com uma taxa de juros constante de 3% ao ano? (considere a Tábua AT-49)

SOLUÇÃO:

$$P\left({}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)} \right) = \frac{m \times {}_{k|}\ddot{a}_x^{(m)}}{m \times \ddot{a}_{x:\overline{k}|}^{(m)}}$$

$$P\left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \right) = \frac{{}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)}}{\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)}}$$

$${}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \approx {}_{33}p_{18} v^{33} \left(\ddot{a}_{51} - \frac{11}{24} \right) \approx 6{,}01$$

$$\ddot{a}_{18:\overline{33}|}^{(12)} \approx \ddot{a}_{18:\overline{33}|} - \left(1 - {}_{33}p_{18} v^{33}\right) \left(\frac{11}{24} \right) \approx 20{,}76$$

$$P\left({}_{33|}\ddot{a}_{18}^{(12)} \right) \approx \frac{6{,}01}{20{,}76} \approx 0{,}289$$

Logo o valor pago mensalmente será de **\$2890**

EXEMPLO 7: Uma pessoa de 20 anos de idade, decide comprar uma anuidade vitalícia que pague um benefício igual a 1, caso chegue vivo à idade de 60 anos. Qual o valor do prêmio puro pago por essa pessoa para adquirir esse plano? Considere a tábua de vida AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano.

SOLUÇÃO:

*Não faz sentido adquirir rendas vitalícias imediatas a prêmios periódicos, todavia, é justificável adquirir rendas vitalícias diferidas. Assim:

EXEMPLO 7

$$P\left({}_{40|}\ddot{a}_{20}\right) = \frac{{}_{40|}\ddot{a}_{20}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{v^{40}\ {}_{40}p_{20}\ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}} = \frac{\frac{N_{60}}{D_{20}}}{\frac{(N_{20}-N_{60})}{D_{20}}} = \frac{N_{60}}{(N_{20}-N_{60})}$$

$$P\left({}_{40|}\ddot{a}_{20}\right) \approx 0{,}157468$$

Caso o segurado tenha interesse de receber $\$25000{,}00$ ao ano, então:

$$25000P\left({}_{40|}\ddot{a}_{20}\right) \approx 25000(0{,}157468\ ) \approx 3936{,}711$$

Lista (entregar)

1) Considere uma pessoa de idade 30 que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga $R\$1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição Uniforme de parâmetros 0 e 70, ou seja, $T \sim U(0,70)$. Suponha que $i = 5\%\, a.a$.

Calcule o prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

2) Uma pessoa de 20 anos decide comprar anuidades temporárias por 20 anos caso chegue vivo à idade de 60 anos. Esse segurado decide pagar um prêmio nivelado no valor de $P = 0{,}157468$.

Considerando a tábua de mortalidade AT-49 e a taxa de juros de 3% ao ano, qual será o valor do benefício contratado pelo segurado?

3) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida vitalício que paga $R\$\,1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α, ou seja, $T \sim Exp(\alpha)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado.

4) Considere uma pessoa de idade x que decide fazer um seguro de vida temporário por 10 anos que paga $R\$\,1{,}00$ no momento de morte do segurado. Admita que o tempo de vida adicional (T) desta pessoa pode ser modelada pela distribuição exponencial de parâmetros α, ou seja, $T \sim Exp(0{,}02)$.

Calcule o Prêmio P anual que deverá ser pago pelo segurado, considere $\delta = 0{,}06$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV,2022.