

Matemática atuarial

Aula 3-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Juros e inflação

➤ Inflação

- Aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como taxa percentual.
 - FIPE
 - FGV
 - DIEESE
- É a elevação generalizada dos preços de uma economia.
 - Excesso de gastos
 - Aumento de salários mais rápido do que da produtividade
 - Aumento dos lucros
 - Aumento nos preços das matérias primas
 - ...

Juros e inflação

- Taxa real de juros (t_r)
 - Essa taxa elimina o efeito da inflação
 - Podem ser inclusive negativas

A relação entre a taxa de juros efetiva (i) a taxa de inflação no período (j) e a taxa real (t_r) é dada por:

$$(1 + i) = (1 + t_r)(1 + j)$$

EXEMPLO 1: Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?



EXEMPLO 1: Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Resp.:

$$i = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 42,58\% \text{ ao ano.}$$

$$(1 + 0,4258) = (1 + t_r)(1 + 0,15)$$

$$t_r \approx 23,98\% \text{ ao ano.}$$

O ganho real do banco terá sido de 23,98% ao ano.

Juros Compostos - Valor presente e Valor futuro

$$M = P(1 + i)^n$$

O capital P também é chamado de valor presente, F_0 , (VP) e o montante M de valor futuro, F (VF), assim:

$$F = F_0(i + 1)^n$$

Logo:

$$F_0 = \frac{1}{(1 + i)^n} F$$

$FCC(i, n) = (1 + i)^n$: Fator de capitalização (O incremento no valor presente até se tornar valor futuro).

$FAC(i, n) = v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$: Fator de atualização do capital, ou fator de desconto (O decremento no valor futuro até voltar ao valor presente).

Juros Compostos- Depósitos em série

Série é a generalização do conceito de soma para uma sequência de infinitos termos.

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Juros Compostos - Depósitos em série

Se a é um número real diferente de zero, então a série infinita:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a + ar + ar^2 + \dots$$

É chamada, série geométrica de razão r .

A sequência de elementos de uma série geométrica é chamada de progressão geométrica.

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Juros Composto - Depósitos em série

➤ A soma de n termos de uma progressão geométrica é dada por S_n , tal que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

para $r \neq 1$

Demonstração:

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando-se pela razão r :

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n \quad (2)$$

Subtraindo-se a (2) de (1), cancelando-se os termos repetidos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + \dots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

EXEMPLO 2: Usando o conceito série geométrica, mostre que $0,999999999999999 \dots = 1$.

Resp.:



EXEMPLO 2: Usando o conceito série geométrica, mostre que $0,99999999999999 \dots = 1$.

Resp.:

Nota que $0,99999999999999 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right) \left(\frac{1}{10}\right)^i$, em que $a = \frac{9}{10}$ e $r = \frac{1}{10}$.

Como $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$, temos que para $n \rightarrow \infty$ e $0 < r < 1$, é igual a

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Logo

$$S = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Juros Compostos- Depósitos em série

- Depósitos em série correspondem a um conjunto de n depósitos de valores (R_j) , distribuídos ao longo do tempo.
- Depósitos constantes e distintos.

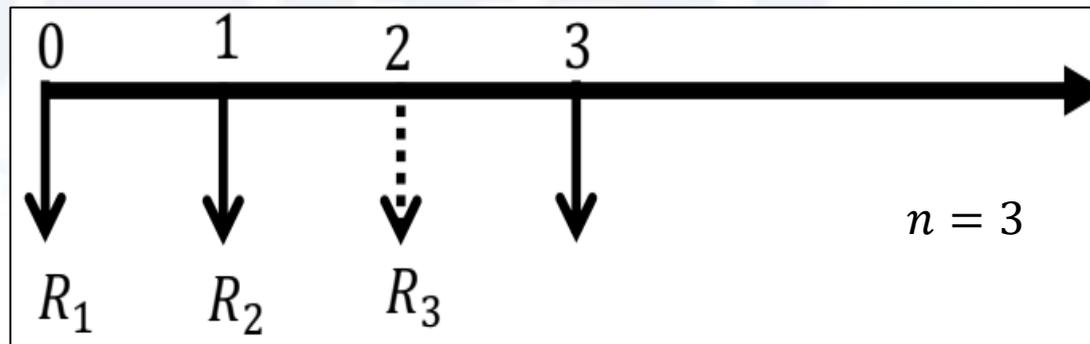
Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Juros Compostos - Depósitos em série

O movimento de dinheiro devido aos depósitos em série constitui o chamado fluxo de caixa.

➤ Fluxo Antecipado: Depósitos no início dos períodos, ou seja, iniciam-se na data zero.

➤ Ao fazer n depósitos, o primeiro depósito começa na data 0, e o último é feito na data $n - 1$

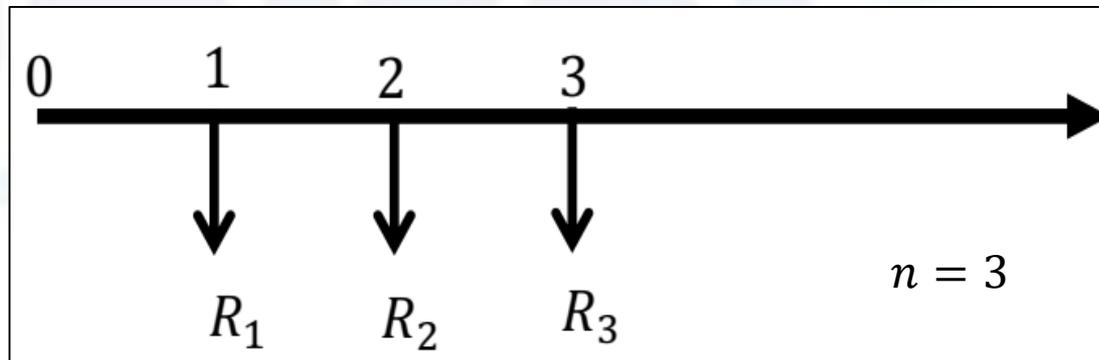


Juros Compostos - Depósitos em série

O conjunto de depósitos ao longo dos n períodos, constitui-se num fluxo de caixa.

➤ Fluxo Postecipado: Depósitos no final dos períodos, ou seja, iniciam-se na data um.

➤ Ao fazer n depósitos, o primeiro depósito começa na data 1, e o último é feito na data n .



EXEMPLO 3: Qual é o montante após n depósitos mensais iguais a R , feitos em uma conta poupança que remunera a uma taxa de juros mensal igual a i ? Considere o fluxo antecipado.



Juros Compostos - Depósitos em série

Data0	R					
Data1		R				
Data2			R			
Data3				R		
...					...	
Data(n-1)	$R(1+i)^{n-1}$	$R(1+i)^{n-2}$	$R(1+i)^{n-3}$	$R(1+i)^{n-4}$		R
	$R(1+i)^n$	$R(1+i)^{n-1}$	$R(1+i)^{n-2}$	$R(1+i)^{n-3}$		$R(1+i)$

$$S = F_0 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} F_j$$

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots + R(1+i) = \sum_{j=1}^n R(1+i)^j$$

$$S = \sum_{j=1}^n R(1+i)^j = (1+i) \sum_{j=1}^n R(1+i)^{j-1}$$

$\sum_{j=1}^n R(1+i)^{j-1}$ corresponde a soma de n elementos de uma progressão geométrica, o termo inicial (a) é igual a R e a razão (r) é igual a $(1+i)$. Assim:

$$S = \frac{R[1 - (1+i)^n]}{[1 - (1+i)]} (1+i) = -\frac{R[1 - (1+i)^n](1+i)}{i}$$

Logo:

$$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Juros Compostos - Depósitos em série

- No caso de depósitos **variáveis** tem-se que (fluxo antecipado *).
 - Fluxo antecipado porém o modelo considera depósito no mês de resgate, daí é um fluxo genérico na verdade.
- Após o primeiro mês o primeiro depósito (F_0) montara á:

$$F_1 = R_0(1 + i) + R_1$$

- Após o segundo mês temos:

$$F_2 = F_1(1 + i) + R_2$$

Logo,

$$F_3 = F_2(1 + i) + R_3$$

$$F_4 = F_3(1 + i) + R_4$$

...

Juros Compostos - Depósitos em série

➤ Note também que:

$$F_1 = R_0(1+i) + R_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + R_2 = [R_0(1+i) + R_1](1+i) + R_2$$

$$F_2 = R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$

$$F_3 = R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + R_4 = [R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = R_0(1+i)^4 + (1+i)^3R_1 + (1+i)^2R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

➤ No tempo n , lembrando o resgate é feito após o último depósito, assim R_n não é depositado.

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$$

Juros Compostos - Depósitos em série

➤ Fluxo Antecipado

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1 + i)^{n-j} R_j$$

➤ Fluxo Postecipado

$$S = \sum_{j=1}^n (1 + i)^{n-j} R_j$$

Fluxo Antecipado

Fluxo Postecipado

Depósito de valor
fixo

$$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Depósito de valor
variável

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$$

$$S = \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j} R_j$$

EXEMPLO 4: Faz-se um depósito mensal de \$ 100,00 em uma conta de poupança que paga juros de 0,6% ao mês. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo Antecipado e também Postecipado.

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

Fluxo Antecipado:

$$S = \frac{100(1 + 0,006)[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = \$303,6144$$

ou

$$S = \sum_{j=0}^2 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = 100(1,006)^3 + (1,006)^2 100 + (1,006)100 = \$303,6144$$

Fluxo Postecipado:

$$S = \frac{100[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = \$301,8036$$

ou

$$S = \sum_{j=1}^3 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = (1,006)^2 100 + (1,006)100 + 100 = \$301,8036$$

Imagina agora que ao invés do interesse no montante ao fim de n depósitos, queremos saber o valor presente (VP) de todos esses depósitos.

Data 0	R	$R \left(\frac{1}{1+i} \right)$	$R \left(\frac{1}{1+i} \right)^2$	$R \left(\frac{1}{1+i} \right)^3$...	$R \left(\frac{1}{1+i} \right)^{n-1}$
Data1		R				
Data2			R			
Data3				R		
...					...	
Data(n-1)						R

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} R \left(\frac{1}{1+i} \right)^j = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v}$$

Em que $v = \frac{1}{1+i}$

➤ O valor presente de uma série de pagamentos representa por exemplo um valor de financiamento a uma taxa i que será pago em n prestações

	Fluxo Antecipado	Fluxo Postecipado
Pagamento Constante	$VP = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v}$	$VP = \frac{Rv(1 - v^n)}{1 - v}$
Pagamento Variável	$VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j$	$VP = \sum_{j=1}^n v^j R_j$



EXEMPLO 5: Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga no ato da liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 5: Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga no ato da liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v} \rightarrow R = \frac{VP(1 - v)}{1 - v^n}$$

Como $v = \frac{1}{1+0,02}$ então

$$R = \frac{15000(1-v)}{1-v^4} = \$3862,11$$

➤ Pagamento no ato da liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j = R + v R + v^2 R + v^3 R$$

$$R = \frac{VP}{\left[1 + \left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3\right]} = \frac{15000}{1 + \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,0404} + \frac{1}{1,0612}} = \$3862,11$$

EXEMPLO 6: Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga 1 ano após a liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?



EXEMPLO 6: Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga 1 ano após a liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao ano. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = \frac{Rv[1 - v^n]}{1 - v} \rightarrow R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \mathbf{\$3939,356}$$

➤ Pagamento 30 dias após a liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1+i} \right)^j R_j = vR + v^2R + v^3R + v^4R$$

$$R = \frac{15000}{\left[\left(\frac{1}{1,02} \right) + \left(\frac{1}{1,02} \right)^2 + \left(\frac{1}{1,02} \right)^3 + \left(\frac{1}{1,02} \right)^4 \right]} = \mathbf{\$3939,35}$$

EXEMPLO: Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga 1 mês após a liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

$$R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \mathbf{\$3939,356}$$

Mês	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
				15000
1	3939,356	15000(0,02) = 300	3939,356 – 300 = 3639,356	15000 – 3639,356 = 11360,644
2	3939,356	11360,644(0,02) = 227,213	3939,356 – 227,213 = 3712,14312	7648,5009
3	3939,356	7648,5009(0,02) = 152,9700176	3939,356 – 152,9700176 = 3786,385982	3862,1149
4	3939,356	3862,1149(0,02) = 77,24229795	3939,356 – 77,24229795 = 3862,113702	0,0011

EXEMPLO 7: (Entregar)

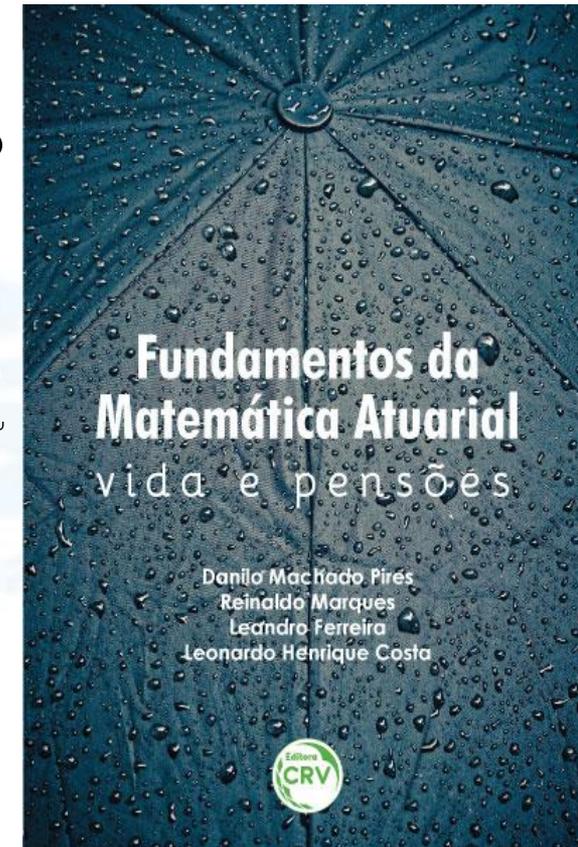
Mostre que $S = (1 + i)^n VP$, nas seguintes situações:

$$a) S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i} \quad \text{e} \quad VP = \frac{R(1-v^n)}{1-v}$$

$$b) S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} \quad \text{e} \quad VP = \frac{Rv(1-v^n)}{1-v}$$

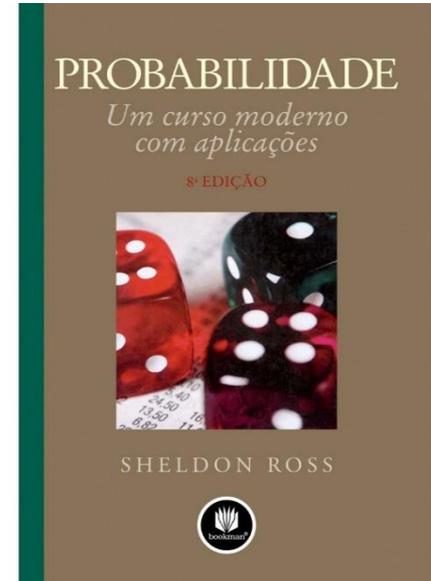
Obs.: $v = \frac{1}{1+i}$ e $R = 1$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.



Bibliografia

JAMES, B. R.; Probabilidade: Um Curso em nível intermediário, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004



Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. Noções de Probabilidade e Estatística, Editora USP: São Paulo, 2001.

