

Matemática atuarial

Aula 2-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires

danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Leonardo Henrique Costa

leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

JUROS

- Ao longo do processo de desenvolvimento das sociedades constatou-se que bens e serviços poderiam ser consumidos ou guardados para o consumo futuro.
- Com o avanço científico diversas metodologias surgiram como auxílio a modelagem do processo de quantificação financeira envolvendo dinheiro ao longo do tempo.
- Valores monetários em “estoque” podem aumentar gradativamente conforme a utilidade temporal.

Universidade Federal de Alfenas

JUROS

- As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira:
- Capital (***P***): capital inicial que será aplicado através de alguma operação financeira...
- Unidade de tempo (***n***): é a unidade temporal geralmente expressa em anos.
- Taxa de juros (***i***): é a taxa de incremento ao capital por unidade de tempo.
- Juros (***J***): rendimento sobre o principal.

JUROS

A existência de Juros decorre de vários fatores, entre os quais destacam-se:

- **Inflação:** A diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período de tempo...
- **Riscos:** Eventos que podem causar desequilíbrio ao patrimônio.
- **Outros:** Aquisição ou oferta de empréstimo a terceiros.

JUROS SIMPLES

Quando o juro incide no decorrer do tempo sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples.

JUROS SIMPLES

$$J = P \times i \times n$$

Juros produzidos depois de n períodos, do capital P Aplicado a uma taxa de juros i .

MONTANTE (M)

$$M = P(1 + i \times n)$$

Capital inicial adicionado aos juros produzidos no período.

JUROS SIMPLES

Um depósito de \$1000 é remunerado a uma taxa de 0,5% de juros ao mês. A sequência a seguir represente os saldos mensais considerando o cálculo do juro simples.

n	Juros Simples por período (J)	Montante (M)
1	$1000(0,005) = 5$	$1000(1 + 0,005 \times 1) = 1005$
2	$1000(2 \times 0,005) = 10$	$1000(1 + 0,005 \times 2) = 1010$
3	$1000(3 \times 0,005) = 15$	$1000(1 + 0,005 \times 3) = 1015$
4	$1000(4 \times 0,005) = 20$	$1000(1 + 0,005 \times 4) = 1020$

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 1: Calcule o montante ao final de dez anos de um capital \$10000,00 aplicada à taxa de juros 18% ao semestre.



EXEMPLO 1: Calcule o montante ao final de dez anos de um capital \$10000,00 aplicada à taxa de juros 18% ao semestre.

Resp.:

Em 10 anos existem 20 semestres, logo:

$$M = 10000(1 + 0,18 \times 20) = R\$46000,00$$

O juro produzido nesse período foi de:

$$J = 10000(0,18 \times 20) = R\$36000,00$$

JUROS COMPOSTOS

Quando a taxa de juros incide sobre o montante obtido do rendimento do período anterior, tem-se um sistema de **capitalização composta** também chamado “**juros sobre juros**”.

Cada montante formado é constituído do capital inicial e dos juros sobre juros formados em período anteriores.

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 2: Faz-se um depósito de \$1000 em uma conta que paga 0,5% de juros ao mês. Considerando o cálculo dos juros compostos, determine uma sequência que represente os saldos mensais.

$$1^\circ \text{ mês} \rightarrow M_1 = 1000 + 1000 \times 0,005 = \mathbf{1000(1,005)}$$

$$2^\circ \text{ mês} \rightarrow M_2 = M_1 + M_1 0,005 = M_1(1,005) = \mathbf{1000(1,005)(1,005)} = \mathbf{1000(1,005)^2}$$

$$3^\circ \text{ mês} \rightarrow M_3 = M_2 + M_2 0,005 = M_2(1,005) = \mathbf{[1000(1,005)^2](1,005)} = \mathbf{1000(1,005)^3}$$

$$4^\circ \text{ mês} \rightarrow M_4 = M_3 + M_3 0,005 = M_3(1,005) = \mathbf{[1000(1,005)^3](1,005)} = \mathbf{1000(1,005)^4}$$

...

$$\mathbf{M_n = 1000(1,005)^n}$$

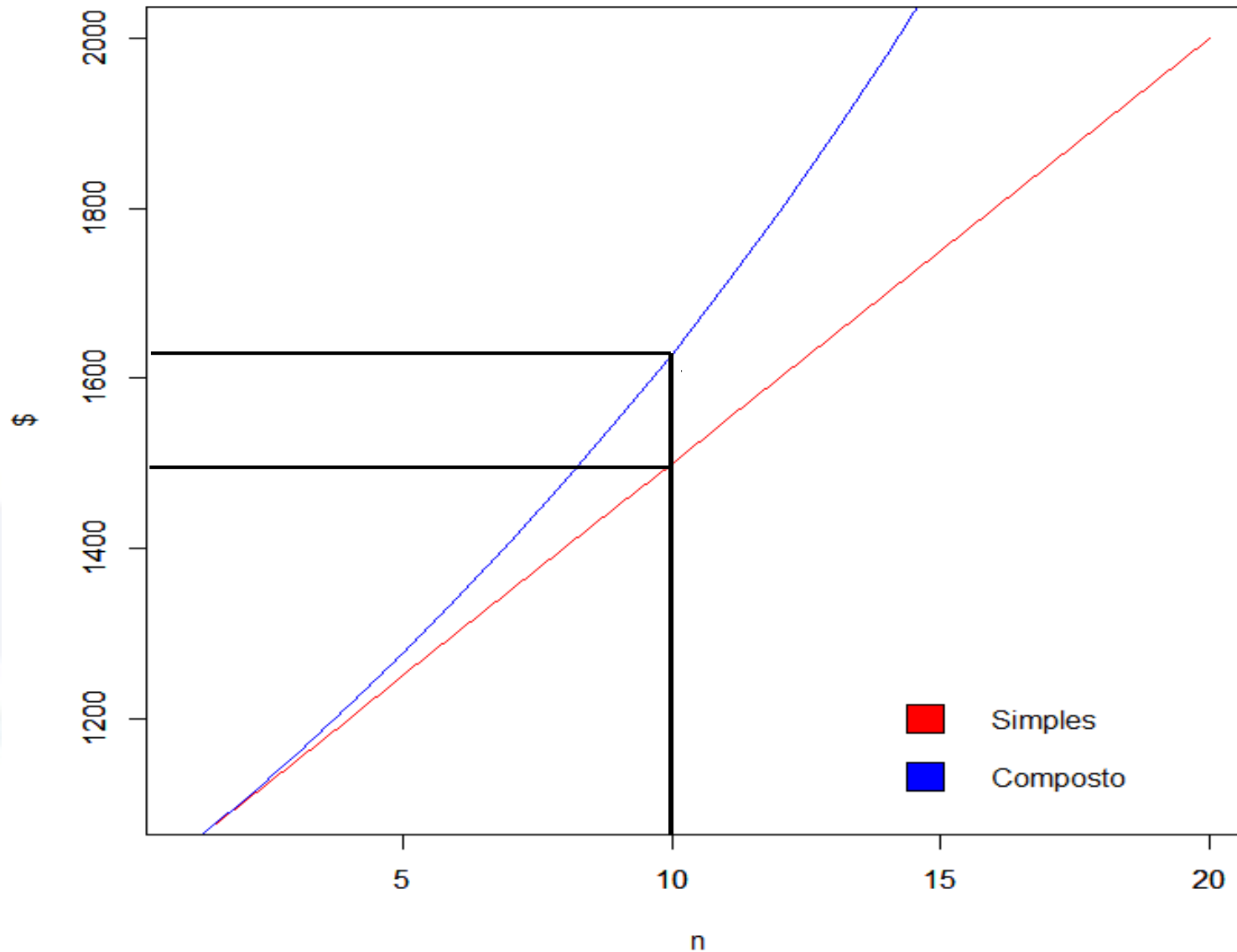
$$\mathbf{M = P(1 + i)^n}$$

EXEMPLO 3: Determine uma sequência que represente os saldos mensais pela capitalização simples e composta. $P = \$1000,00$ $i = 0,5\%$ de juros ao mês.

n	Juros Simples (J)	Montante (M)	Juros compostos (J)	Montante (M)
1	$1000 \times 0,005 = 5$	$1000(1 + 0,005 \times 1) = 1005$	$1000(0,005) = 5$	$1000(1 + 0,005)^1 = 1005$
2	$1000 \times 0,005 = 5$	$1000(1 + 0,005 \times 2) = 1010$	$1005(0,005) = 5,025$	$1000(1 + 0,005)^2 = 1010,025$
3	$1000 \times 0,005 = 5$	$1000(1 + 0,005 \times 3) = 1015$	$1010,025(0,005) = 5,0501$	$1000(1 + 0,005)^3 = 1015,075$
4	$1000 \times 0,005 = 5$	$1000(1 + 0,005 \times 4) = 1020$	$1015,075(0,005) = 5,0753$	$1000(1 + 0,005)^4 = 1020,151$
	$J = Pi$	$M_n = P(1 + in)$	$J_n = P[(1 + i)^{n-1}]$	$M_n = P(1 + i)^n$

Na prática, as empresas, órgãos governamentais e investidores utilizam os juros compostos.

Montantes obtidos pelo sistema de juros simples e compostos, para um capital inicial de \$1000,00 a 0,5% ao mês.



EXEMPLO 4: João teve seu carro roubado. Ao comunicar o sinistro para a seguradora, recebeu a seguinte proposta como indenização: \$20000,00 agora ou \$21211,92 daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1 + i)^n$$

$$M = 21211,91 \quad P = 20000 \quad n = 60 \text{ dias} \rightarrow 2 \text{ m\^e s}$$

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 4: João teve seu carro roubado. Ao comunicar o sinistro para a seguradora, recebeu a seguinte proposta como indenização: \$20000,00 agora ou \$21211,92 daqui a 60 dias. Qual a taxa de juros mensal utilizada pela seguradora?

$$M = P(1 + i)^n$$

$$M = 21211,91 \quad P = 20000 \quad n = 60 \text{ dias} \rightarrow 2 \text{ m\^es}$$

$$21211,92 = 20000(1 + i)^2$$

$$1,0606 = (1 + i)^2$$

$$(1,0606)^{\frac{1}{2}} = 1 + i$$

$$1,03 \approx 1 + i$$

$$i \approx 0,03 \rightarrow 3\% \text{ ao m\^es}$$

JUROS COMPOSTOS

Taxas proporcionais

São taxas que se relacionam linearmente (**juros simples**).

EXEMPLO 5:

Fulano emprestou \$2000,00 a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0,04 \times 12) = \$2960,00$$

Essa taxa é proporcional a $(0,04 \times 2)$ ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000(1 + 0,08 \times 6) = \$2960,00$$

Taxas equivalente

As taxas não se relacionam de forma linear (**juros compostos**).

EXEMPLO 6a:

Fulano emprestou \$2000,00 a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$M = 2000(1 + 0,04)^{12} = \$3202,06$$

Diferente de:

$$M = 2000(1 + 0,08)^6 = \$3173,74$$

JUROS COMPOSTOS

Taxas equivalente

As taxas equivalente são chamadas assim pois apesar de serem diferentes, se aplicadas a um mesmo capital, produzem e uma mesma data o mesmo montante.

EXEMPLO 6b:

Fulano emprestou \$2000,00 a sua irmã, cobrando 4% ao mês. Quanto receberá daqui 12 meses?

$$(1 + 0,04)^{12} = (1 + i)^6$$

$$i = 0,0816$$

Essa taxa é equivalente a **0,0816** ao bimestre, assim 12 meses são 6 bimestres.

$$M = 2000(1 + 0,0816)^6 = \$3202,06$$

RELAÇÕES EQUIVALENTES

Taxas de Juros podem ser representadas em diferentes unidades de tempo (ao ano, ao mês, etc.) e são ditas equivalentes se produzem o mesmo efeito quando aplicadas em um mesmo período de tempo.

$$(1 + i_d)^{360} = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_b)^6 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_q)^3 = (1 + i_s)^2 = (1 + i_a)$$

i_d , i_m , i_b , i_t , i_q , i_s e i_a correspondem as taxas de juros diária, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual, respectivamente.

TAXAS DE JUROS

Taxa nominal

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

- *340% ao semestre com capitalização mensal, 340%a. s. / mês.*
- *1150% ao ano com capitalização mensal, 1150%a. a. / mês.*

Taxa Efetiva

É quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquela a que a taxa está referida.

- *140% ao mês com capitalização mensal.*
- *250% ao semestre com capitalização semestral.*

EXEMPLO 7: Uma empresa contrai um empréstimo de \$100000,00 em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, com capitalização mensal. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.



EXEMPLO 7: Uma empresa contrai um empréstimo de \$100 000,00 em um banco, cuja condição seja pagar a uma taxa de juros de 36% ao ano, com capitalização mensal. Quanto será a dívida depois de um ano?

Resp.

A taxa nominal corresponde a 36% a.a.

Pois:

$$i = \frac{36}{12} = 3\% \text{ ao mês (nominal)}$$

A capitalização mensal indica que os 36% corresponde a soma das taxas mensais ao longo de um ano.

Assim:

$$M = 100000(1 + 0,03)^{12} \approx \$142576,1$$

$$(1 + 0,03)^{12} = (1 + i)$$

$$i \approx 42,576\% \text{ a.a.}$$

A taxa efetiva será de aproximadamente 42,576% a.a.

Logo

$$M = 100000(1 + 0,42576) \approx \$142576,00$$

TAXAS DE JUROS

- Dada a taxa nominal, se quiser saber a **taxa efetiva** basta descapitalizar a juros simples (divisão) e capitalizar a juros compostos. Assim

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

- Em que i_n é a taxa nominal, com n períodos de conversão.
 - A taxa nominal i_n é o resultado da soma da taxa verificada em n períodos.
- i é a taxa efetiva cujo período de formação corresponde ao período ao qual a taxa nominal foi apresentada.

Exemplos:

- Se i_n for uma taxa semestral/mês então, i é a taxa efetiva semestral.
- Se i_n for uma taxa anual/dias então, i é a taxa efetiva anual

EXEMPLO 8: Considere as taxas $i = 340\%$ ao semestre e 300% ao ano, qual será as taxas de juros efetivas ao considerar que foram capitalizadas mensalmente ?

$$i = \left(1 + \frac{340}{6}\right)^6 - 1 \approx 1378\% \text{ a.s}$$

$$i = \left(1 + \frac{300}{12}\right)^{12} - 1 \approx 1355\% \text{ a.a}$$

Perceba

TAXAS MENSAIS

$$i = \frac{340}{6} \approx 56,67\% \quad i = \frac{300}{12} = 25\%$$

TAXAS EFETIVAS

$$(1 + i_s)^2 = (1 + i_m)^{12} \quad \rightarrow i_s = (1 + i_m)^6 - 1$$

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \quad \rightarrow i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$$

EXEMPLO 9: Admitindo-se uma taxa de juros nominal de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa **efetiva** supondo os períodos de capitalização: anual, semestral, quadrimestral, bimestral, mensal e diário.

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n} \right)^n - 1$$

EXEMPLO 9:

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado anualmente, a taxa acaba é a própria taxa efetiva.

$$i = (1 + 0,72)^1 - 1 = 0,72$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado semestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos dois semestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{2}\right)^2 - 1 = 0,8496$$

- Se o 72% ao ano tiver sido capitalizado quadrimestral, significa que esse valor foi obtido de a partir da soma das taxa de juros nos 3 quadrimestres do ano, assim a taxa efetiva é obtida através de:

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{3}\right)^3 - 1 \approx 0,906624$$

...

EXEMPLO 9 : Admitindo-se uma taxa de 72% ao ano, mostre como se comporta a taxa efetiva supondo os períodos de capitalização: diário, mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual.

$$i = (1 + 0,72)^1 - 1 = 0,72$$

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{2}\right)^2 - 1 = 0,8496$$

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{3}\right)^3 - 1 \approx 0,906624$$

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{4}\right)^4 - 1 \approx 0,9387778$$

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{6}\right)^6 - 1 \approx 0,9738227$$

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{12}\right)^{12} - 1 \approx 1,012196$$

$$i = \left(1 + \frac{0,72}{360}\right)^{360} - 1 \approx 1,05295$$

OBS.:

Ao se afirmar que a taxa de juros é de 72% ao ano , capitalizado diariamente. Isso equivale em dizer que esse valor foi obtido pela soma das taxa de juros ao longo de 360 dias. Assim a taxa diária é $\frac{0,72}{360} = 0,002$ e o equivalente a esse valor em um ano corresponde a :

$$1 + i = (1 + 0,002)^{360}$$

$$i \approx 1,05295$$

TAXAS DE JUROS

- Taxa instantânea de juros
 - Se o número de períodos dos quais se compõem a taxa nominal crescem muito, dizemos que essa taxa é uma soma contínua, também chamada de taxa de juros instantânea.
 - De acordo com Hull¹, “ *taxas de juros capitalizados continuamente são bastante utilizadas quando as opções e outros derivativos complexos estão sendo precificados. E para fins práticos a capitalização contínua pode ser considerada equivalente à diária*”

¹ Hull, John. Introdução aos mercados futuros e de opções. 2. ed. São Paulo: Bolsa Mercantil e de Futuros, Cultura editores Associados, p. 52-54,1996

TAXAS DE JUROS

- Taxa instantânea de juros e taxa de juros efetiva

$$i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - \lim_{n \rightarrow \infty} 1$$

$$i = e^{i_n} - 1$$

$$ke^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k \left(1 + \frac{r}{n}\right)\right)^n$$

TAXAS DE JUROS

- Para indicar que a taxa nominal teve capitalização contínua, alguns autores optam por representar i_n por δ , também chamada de taxa de juros instantânea. Logo

$$i = e^{\delta} - 1$$

ou

$$\delta = \ln(1 + i)$$

δ :Taxa de juros instantânea: *os juros são formados continuamente, por meio de uma capitalização infinitamente frequente.*

i : A taxa de juros efetiva com o período de formação de capital igual ao apresentada por δ : *os juros são formados somente ao final de cada período de capitalização.*

EXEMPLO 10: Seja a taxa de juros **nominal de 6% ao ano**. Dado um capital de \$1000,00 qual o valor do montando ao fim de 3 anos, considerando que.

- a) A taxa foi capitalizada mensalmente (**6% a. a. / m.**)
- b) A taxa foi capitalizada diariamente (**6% a. a. / d.**)
- c) A taxa foi capitalizada continuamente (**$\delta = 6\% a. a.$**)



taxa de juros **nominal de 6% ao ano**. $P = \$1000,00$ e $n = 3$ anos.

$$M = P[1 + i]^3 \text{ e } i = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

a) A taxa foi capitalizada mensalmente (**6% a. a. / m.**)

$$M = 1000 \left[\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} \right]^3 \approx \$1196,681$$

b) A taxa foi capitalizada diariamente (**6% a. a. / d.**)

$$M = 1000 \left[\left(1 + \frac{0,06}{360}\right)^{360} \right]^3 \approx \$1197,199$$

c) A taxa foi capitalizada continuamente (**$\delta = 6\% a. a.$**)

$$M = 1000 \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0,06}{k}\right)^k \right]^3 = 1000(e^{0,06})^3 \approx \$1197,217$$

TAXAS DE JUROS

- Assim o cálculo do montante (valor futuro) em um regime de capitalização contínua é dado por:

$$M = P(1 + i)^n = Pe^{\delta n}$$

ou

$$P = M \left(\frac{1}{1 + i} \right)^n = Me^{-\delta n}$$

- Importante lembrar que por se tratar de período contínuo é comum representar n como sendo t .

UnifalMG
Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 11: Um certo banco paga juros de 15% ao mês, em um regime de capitalização contínua. Quanto um cidadão deve investir para que daqui a dois anos possa retirar \$1000000,00?

$$P = Me^{-\delta n}$$

$$P = 1000000e^{-0,15 \times 24} \approx \$27323,72$$

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

EXEMPLO 11: Calcule o tempo de aplicação de um capital de \$120 000,00 que aplicado a uma taxa contínua de 3% ao mês produz um montante de \$200 000,00.

$$t = \ln\left(\frac{M}{P}\right) \frac{1}{\delta}$$

$$t \approx 17,02 \text{ meses}$$

Unifal
Universidade Federal de Alfenas

TAXAS DE JUROS

Pode-se lidar com a taxa instantânea de juros que varia em função do tempo.

$$F(t) = F(s)e^{\int_0^t \delta(y)dy}$$

Em que s e t são dois instantes de tempo sendo que $s < t$.

- Portal Halley : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.

