

# Matemática atuarial

## Aula 1-Revisão de Probabilidade

Danilo Machado Pires  
[danilo.pires@unifal-mg.edu.br](mailto:danilo.pires@unifal-mg.edu.br)  
Leonardo Henrique Costa  
[Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br](mailto:Leonardo.costa@unifal-mg.edu.br)

# Revisão de probabilidade

- A ciência objetiva a coleta de informações na natureza e a formulação de modelos ... que expliquem parte dos fenômenos ou permitam a sua previsão.
- Método científico,
  - Conjunto de regras para obtenção do conhecimento durante a investigação científica...
  - As hipóteses formuladas são verificadas posteriormente, com a coleta e interpretação de dados.
- Modelo e realidade por vezes são erroneamente confundidos.

# Revisão de probabilidade

- Por melhor que seja um modelo, ele sempre contará com incerteza.
- Modelos determinísticos
  - Condições bastante controladas,
  - Variações desprezadas
- Modelos probabilísticos
  - Controle total e inviabilizado
  - Variações não podem ser ignoradas.

# Revisão de probabilidade

- **Fenômeno aleatório** é todo evento que quando observado repetidamente sob as mesmas condições produz resultados diferentes.
  - Quando a repetição do fenômeno é controlada pelo experimentador, é dito ser um **experimento probabilístico**.

# Revisão de probabilidade

- **Espaço amostral ( $\Omega$ )** é o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno aleatório.
- **Definição** Seja  $\Omega$  o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto  $A \subset \Omega$  será chamado evento.
  - $\Omega$  é o evento certo,
  - $\emptyset$  o evento impossível.
  - Se  $\omega \subset \Omega$ , o evento  $\{\omega\}$  é dito elementar (ou simples).

# Revisão de probabilidade

## EXEMPLO 1:

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

2) Altura dos alunos da Unifal

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: 0 \leq t\}$$

# Revisão de probabilidade

1) Jogar um dado

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

2) Altura dos alunos da *Unifal*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}: 1,5 \leq x \leq 2\}$$

$$A = \{1, 6 \leq x \leq 1, 7\}$$

3) Tempo de vida restante de uma pessoa

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$$

$$A = \{0 \leq t \leq 30\}$$

Um evento ao qual atribuímos uma probabilidade é chamado evento aleatório.

# Revisão de probabilidade- Conceito de Probabilidade

## ➤ Teoria clássica

Dado o espaço de resultados  $\Omega$ , constituído por um número finito de  $n$  elementos igualmente prováveis,..., define-se a probabilidade de acontecimento de  $A$ , como sendo a razão de resultados favoráveis  $A$  e o número de resultados possíveis.

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de resultados de } A}{n^{\circ} \text{ de resultados possíveis}}$$

...se conhece fatos decisivos sobre o mecanismo ou processo que produz os resultados



# Revisão de probabilidade- Conceito de Probabilidade

## ➤ Teoria Frequentista

➤ Na observação de um certo fenômeno através de um experimento, a probabilidade de um certo evento  $A$  é definida como a sua frequência observada, à medida que o número de ensaios tende para o infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

em que  $n_A$  é o número de ensaios em que o evento  $A$  foi observado, e  $n$  o número total de ensaios. À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa com que se realiza  $A$  tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1.

# Revisão de probabilidade- Conceito de Probabilidade

- Probabilidade subjetiva e lógica
  - Define-se como uma medida do grau de confiança em relação a uma proposição.
  - Ela é função da quantidade de informação disponível ...
  - Julgamento pessoal .
  - Pensamento Bayesiano.
  - Possui a restrição de que deve obedecer a critérios de consistência, obedecendo aos axiomas de probabilidade.

Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

# Revisão de probabilidade

## ➤ Definição formal de probabilidade

Seja o espaço amostral  $\Omega$  um conjunto não vazio. Uma probabilidade em  $\Omega$  é uma função de conjunto  $P(\cdot)$  que associa a subconjuntos  $A$  de  $\Omega$  um número real  $P(A)$  que satisfaz os axiomas a seguir.

- Para todo  $A \subseteq \Omega$  ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
- $P(\Omega) = 1$ ;
- Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forem, dois a dois, eventualmente excludentes (disjuntos), então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

# Revisão de probabilidade

- Na realização de um fenômeno aleatório, é comum termos interesse em uma ou mais quantidades.
  - Essas quantidades são funções das ocorrências do fenômeno.
- Variável aleatória: é uma função que associa a cada elemento de  $\Omega$  um número real.

**EXEMPLO 2:** Sabe-se que em uma fábrica 25% dos itens produzidos apresentam algum problema de fabricação:

Itens defeituosos  $\left( D \rightarrow P(D) = \frac{1}{4} \right)$

Itens perfeitos  $\left( Pe \rightarrow P(Pe) = \frac{3}{4} \right)$

# Revisão de probabilidade

Para uma amostra  $n = 2$  peças retiradas é possível construir uma tabela onde  $X$  é o número de peças defeituosas que pode ocorrer e  $P(X)$  será a probabilidade do resultado.

$X$	0	1	2
	$(Pe, Pe)$	$(D, Pe)(Pe, D)$	$(D, D)$
$P(X)$	$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{16}$	$\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

# Revisão de probabilidade

## ➤ Variáveis Aleatórias Discretas

- $P(X = x)$  Função de probabilidade.
- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$  para todo  $i$ .
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$

## ➤ Variáveis aleatórias contínuas

- $f(x)$  Função de densidade (f.d.p)
- $f(x) \geq 0$  para qualquer valor de  $x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

# Revisão de probabilidade

## EXEMPLO 3:

a)

$X$	1	2	3	4
$P(X)$	0,1	0,2	0,3	0,4

b)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,6 & \text{se } x = 0 \\ 0,4 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

c)

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,7 & \text{se } x = 0 \\ 0,5 & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2 + x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x) dx = \frac{6}{5} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + x) dx = \frac{6}{5} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{6}{5} \left( \frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) = \frac{6}{5} \left( \frac{5}{6} \right) = 1$$

e)

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty}$$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{2x}} - \left( -\frac{1}{e^{2 \times 0}} \right) = 1$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & \text{se } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10} dx + \int_2^6 -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20} dx$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{x}{10} \Big|_{x=0}^{x=2} + \left( -\frac{3x^2}{80} + \frac{9x}{20} \right) \Big|_{x=2}^{x=6}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$



# Revisão de probabilidade

Função de distribuição de probabilidade (função de distribuição).  
Em geral ela é representada por  $F_X(x)$ .

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz$$

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^k P(X = x_i)$$

O complementar da função acumulada, também chamada de função de sobrevivência, ou função de excesso de danos é representada por  $S_X(x)$  ou  $\bar{F}_X(x)$ .

$$S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

# Revisão de probabilidade

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0;$
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1;$
  - Se  $x_1 \leq x_2$ , então  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ ,  $F_X(x)$  é uma função crescente de  $x$ ;
  - $P_X(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1);$
- 
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} S_X(x) = 1;$
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} S_X(x) = 0;$
  - Se  $x_1 > x_2$ , então  $S_X(x_1) > S_X(x_2)$ ,  $S_X(x)$  é uma função decrescente de  $x$ ;

# Esperança de variáveis aleatórias

- ...forma de avaliar ganhos em jogos com apostas a dinheiro.
- Representa o ponto de equilíbrio da distribuição de seus valores.
- ...parâmetro para vários modelos probabilísticos.

# Esperança de variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias discretas

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \mu_X$$

Variáveis aleatórias Contínuas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu_X$$

# Esperança de variáveis aleatórias

Seja  $X$  uma variável aleatória e  $g$  uma função, ambos com domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor da função  $g(X)$  denotado por  $E[g(X)]$  é definido por:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j) P(X = x_j)$$

**Exemplo 4:** Segundo determinada tábua de vida, o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

$T$	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

- a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?
- b) Seja  $g(T) = v^{T+1}$  calcule  $E[g(T)]$ , em que  $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$ .

**Exemplo 4:** Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado por:

$T$	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

## Solução

a) A expectativa de vida para uma pessoa dessa idade é?

$$E(T) = \sum tP(T = t) = 0,4622$$

b) Seja  $g(T) = v^{T+1}$  calcule  $E[g(T)]$ , em que  $v = \left(\frac{1}{1,03}\right)$ .

$$E[g(T)] = E(v^{T+1}) = \sum v^{t+1}P(T = t) = 0,9866602$$

# Esperança de variáveis aleatórias

Seja  $L$  um valor limite dentro do domínio de  $X$ , e seja  $Y$  uma variável aleatória “Valor de  $X$  sujeito ao limite  $L$ ”. Então:

$$Y = \begin{cases} X, & X < L \\ L, & X \geq L \end{cases}$$

Logo, para o caso de  $X$  se contínuo tem-se que:

$$E(Y) = E(X; L) = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + \int_L^{\infty} L f_X(x) dx = \int_{-\infty}^L x f_X(x) dx + L S_X(L)$$

E no caso de  $X$  se discreto, tem-se:

$$E(Y) = E(X; L) = \sum_{x_i < L} x_i P_X(x_i) + \sum_{x_i = L}^{\infty} L P_X(x_i) = \sum_{x_i = L}^{x_i = L} x_i P_X(x_i) + L P_X(X \geq L)$$



**Exemplo 5:** Segundo determinada tábua de vida o tempo de vida adicional de uma pessoa de 106 é modelado da seguinte forma:

$T$	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

- a) Determinado produto oferecido por uma seguradora tem um prêmio calculado a partir do valor esperado da variável aleatória  $g(T) = v \frac{1-v^T}{1-v}$ , em que  $v = \frac{1}{1,03}$ . A seguradora determina que irá cobrar dos seus segurados um prêmio baseado no valor esperado de  $g(T)$ , sujeito a um limite técnico  $g(2)$ . Calcule o prêmio sujeito a esse limite.

$T$	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

## Solução:

Seja  $Y$ , tal que:

$$Y = \begin{cases} g(T), & g(T) < g(2) \\ g(2), & g(T) \geq g(2) \end{cases}$$

Equivalente a

$$Y = \begin{cases} g(T), & T < 2 \\ g(2), & T \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_Y = E(Y) = E[g(T); g(2)]$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(T) P(T) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T)$$

$T$	0	1	2	3
$P(T)$	0,67514	0,195183	0,1219955	0,0076815

**Solução:**

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 g(T) P(T) + g(2) \sum_{t=2}^3 P(T)$$

$$\Pi_Y = \sum_{t=0}^1 v \frac{1 - v^t}{1 - v} P(T) + v \frac{1 - v^2}{1 - v} \sum_{t=2}^3 P(T) \approx 0,4376311$$

- Portal Halley : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2<sup>a</sup> edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2022.

