# Matemática atuarial

## Seguros Aula 4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

# Introdução

- A matemática atuarial é o ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
  - Avaliar riscos.
  - Avaliar sistemas de investimentos.

- A matemática atuarial atua fornecendo meios para apuração de prêmios de seguros ligados à vida...
  - Produtos atuariais do ramo vida
    - Seguros,
    - Planos de previdência,
    - Planos de benefício

# Seguros

- *Seguro é todo contrato pelo qual uma das partes (**segurador**) se obriga a pagar um *benefício a outra (**segurado**) em caso de ocorrência de **sinistro**, em troca do recebimento de um **prêmio** seguro.*

- Características do contrato de seguros
  - Aleatório: Depende de elementos futuros e incertos;
  - Oneroso e Bilateral: Há obrigações para as duas partes, segurado e segurador possuem ônus e vantagens econômicas;
  - Solene: Há uma formalidade materializada na forma de apólice;

# Seguro de vida

- Seguros de vida são contratos de seguro estabelecidos com base no risco de morte .
  - Garante ao beneficiário um capital ou renda determinada no caso de morte.
  - Mediante coberturas adicionais, pode cobrir invalidez permanente.
  - Os benefícios podem ser pagos de uma só vez ou durante um determinado período estipulado na apólice.
  - Refletem uma característica única nos seres humanos.

# Seguro de vida

- Para a apuração dos prêmios ligados à vida é necessário uma avaliação do risco de morte:

- Como o risco é uma probabilidade de ocorrência de eventos desfavoráveis, logo:

  - É necessário identificar e caracterizar a variável aleatória trabalhada.
    - **Tempo de vida restante.**

- Diferente do risco de danos, no risco de vida (sob certas circunstâncias) a seguradora lida com a certeza que terá que pagar algum dia o valor do benefício.

# Seguro de vida

- Suponha que a seguradora deseja guardar o valor presente do gasto que ela terá com o segurado no futuro. Qual deverá ser esse valor?

$$F_0 = Fv^n = bv^n$$

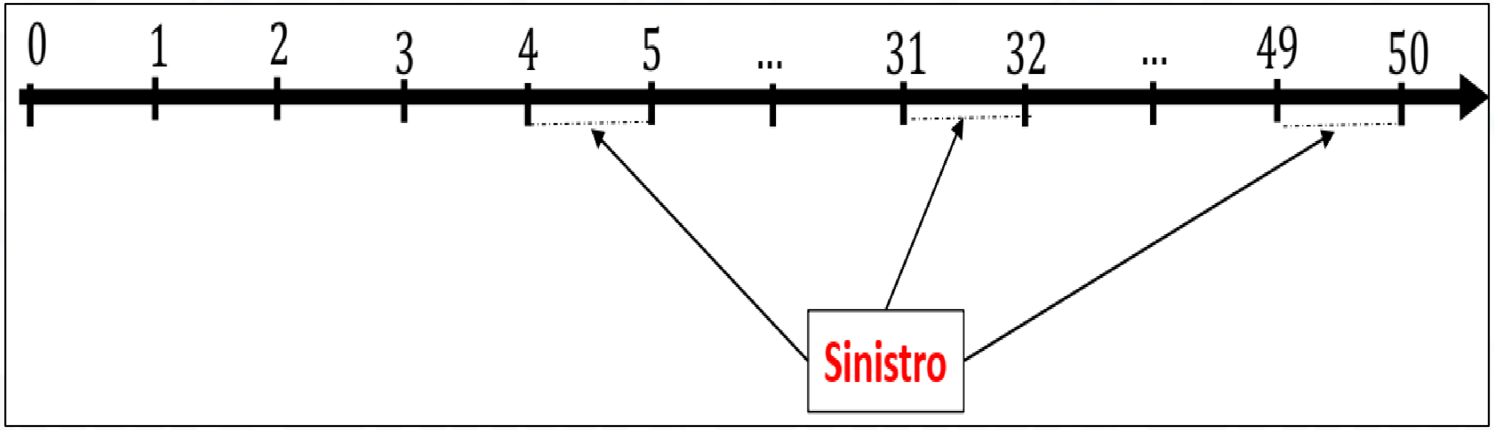
É usual chamar de $b$ o benefício pago ao segurado, e $n$ nesse caso corresponde ao tempo de vida do segurado.

- O tempo de vida futuro (ou adicional ) de um indivíduo de idade $x$, que deseja contratar um seguro de vida inteiro (vitalício) de definida por uma variável aleatória, tal que:
  - $T \in (0, \infty)$
  - Tábua de vida.
  - Função de distribuição.

**EXEMPLO 1:** Para que um beneficiário receba um valor financeiro de $\$100\,000{,}00$ ao final do ano do sinistro. Qual deve ser o valor presente $(VP)$ ou $F_0$?

**Resp.:**

$$VP = 100000\left(\frac{1}{1+i}\right)^{T+1} = 100000v^{T+1}$$



**EXEMPLO 1 (continuação):** Para o caso de $i = 5\%$ ao ano, então $v = \frac{1}{1+0,05} = 0,9524$, assim, pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário a pagar o benefício de $\$100\,000,00$ para os casos em que:

- O sinistro ocorre em $4$ anos.

$$VP =$$

- O sinistro ocorre em $31$ anos.

$$VP =$$

- O sinistro ocorre em $49$ anos.

$$VP =$$

**EXEMPLO 1 (continuação):** Para o caso de $i = 5\%$ ao ano, então $v = 0{,}9524$ , assim, pode-se por exemplo calcular qual o valor presente necessário a pagar o benefício de $\$100\,000{,}00$ para os casos em que:

- O sinistro ocorre em $4$ anos.

$$VP = 100000v^{4+1} = 100000(0{,}9524\ )^{5} \approx \$78352{,}61$$

- O sinistro ocorre em $31$ anos.

$$VP = 100000v^{31+1} = 100000(0{,}9524\ )^{32} \approx \$20986{,}61$$

- O sinistro ocorre em $49$ anos.

$$VP = 100000v^{49+1} = 100000(0{,}9524\ )^{50} \approx \$8720{,}37$$

# Seguro de vida

- Em resumo temos que a uma taxa de $5\%$ ao ano para um beneficiário poder ganhar $b = \$100000{,}00$ reais depois de $4$ , $31$ e $49$ anos, tempos que ter os seguintes valores presentes.

| $T(\,anos)$ | $VP(\$)$ |
|---|---|
| $4$ | $\$78352{,}61$ |
| $31$ | $\$20986{,}61$ |
| $49$ | $\$\,8720{,}37$ |

- Imagine que $T$ é uma variável aleatória e esses são os únicos valores que ele pode assumir. Então que é o valor presente esperado que o indivíduo $x$ deveria pagar hoje por este seguro de modo que a seguradora receba o necessário para pagar o benefício de $\$100\,000{,}00$?

# Seguro de vida

A resposta a essa questão está relacionada a esperança matemática ( valor esperado ou média probabilística) de uma função de variável aleatória.

Para o caso em questão seja $T$ uma variável, então :

$$E[g(T)] = \sum_{j} g(t_j) P(T = t_j)$$

# Seguro de vida

Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de $bv^{T+1}$, logo:

$$E(VP) = E(bv^{T+1}) = b\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}+\boldsymbol{1}}\right)$$

# Seguro de vida

Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser o valor esperado para $bv^{T+1}$, logo:

$$E(VP) = E(bv^{T+1}) = bE(v^{T+1})$$

$$E(VP) = 100000(0{,}9524\,)^{5}P(T=4) + 100000(0{,}9524\,)^{32}P(T=31) + 100000(0{,}9524\,)^{50}P(T=49)$$

$$E(VP) = 100000[(0{,}9524\,)^{5}P(T=4) + (0{,}9524\,)^{32}P(T=31) + (0{,}9524\,)^{50}P(T=49)\,]$$

$$E(VP) = 100000\boldsymbol{E\left(v^{T+1}\right)}$$

Também chamado de **valor presente atuarial VPA.**

# Seguro de vida

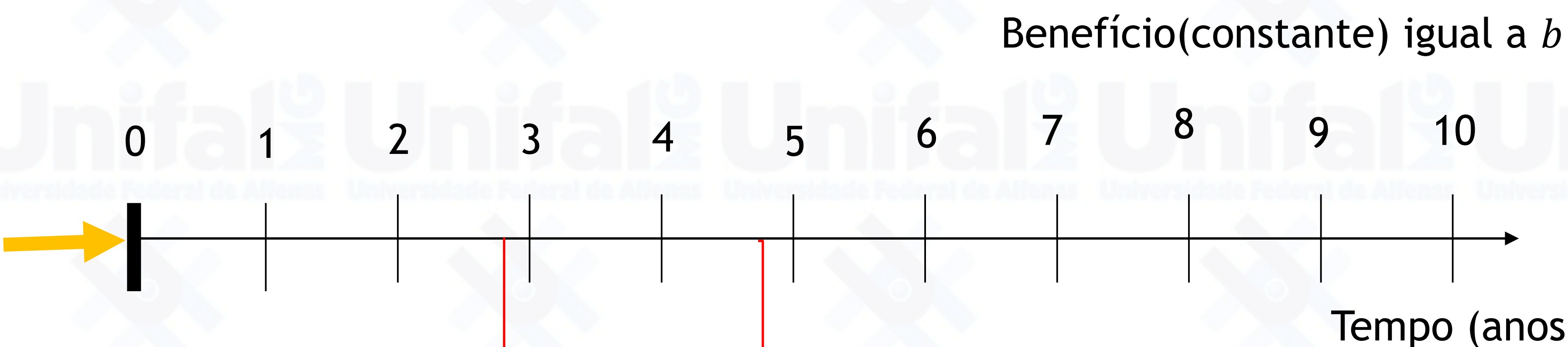
*Definição*: Seja $T$ a variável aleatória associada ao tempo de vida futuro, ou seja, o tempo entre a emissão da apólice do seguro e a morte do segurado, então:

$b_T = b$ → Função benefício;

$v_t = v^{t+1}$ → Função desconto;

$Z_T = bv^{T+1}$ → Função valor presente.

# Seguro de vida pago ao fim do ano de morte




$$Z = b\frac{1}{(1+i)^{2+1}}$$

$$Z = b\frac{1}{(1+i)^{4+1}}$$

$$Z_T = bv^{T+1}$$

# Prêmio Puro único

- Chame de **prêmio puro único** a parcela única do prêmio, suficiente para pagar sinistros.
  - Neste sentido o **prêmio puro único** é o prêmio que propõe o pagamento de despesas relacionadas ao risco que está sendo assumido pela seguradora.
    - O valor **esperado** do valor presente de todos os benefícios que a seguradora se compromete a pagar.
  - Em geral é estabelecido em um dado período, normalmente um ano.
  - O termo ***puro*** significa que ao valor considerado não foram adicionadas quaisquer cargas técnicas.
    - De gestão ou comerciais
  - O termo ***único*** se refere ao fato do pagamento do prêmio ser feito mediante um único pagamento.

# Seguro de vida

- Só há equilíbrio entre lucro e prejuízo se houver um elevado número de contratos do mesmo tipo...

  - A reserva criada, recebendo apenas como prêmio o valor atuarial do risco coberto, não é suficiente para garantir que a seguradora não venha a ter prejuízos significativos.

# SEGURO DE VIDA VITALÍCIO (INTEIRO)

- Existe incerteza sobre o momento do pagamento, e o benefício será pago não importando quando.

- O valor presente de um benefício unitário pago ao final do ano de morte de um segurado de idade $x$ será representado pela variável aleatória, $Z_{T_x}$, tal que:

$$Z_{T_x} = v^{T+1}, T = 0,1,\dots,\omega - x$$

em que $\omega$ corresponde a última idade da tábua de vida usada como modelo de probabilidade...

**EXEMPLO 2:** Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de $110$ anos? Considere um benefício igual a $\$1$, com taxa de juros de $4\%$ ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

| $x$ | $q_x$ |
|---|---|
| | ... |
| 110 | 0,60392 |
| 111 | 0,66819 |
| 112 | 0,73948 |
| 113 | 0,81825 |
| 114 | 0,90495 |
| 115 | 1,00000 |

- Resp.:

$$\boldsymbol{\omega - x = 5}$$

$$b_T = \begin{cases} 1\,, t = 0,1,2,\ldots,5 \\ 0,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$ → Função benefício;

$$v_T = v^{t+1}\,, t \geq 0$$ → Função desconto;

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, \quad T = 0,1,\ldots,5 \\ \quad 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$ → Função valor presente.

**Obs. É normal o uso de $T_x$ para indicar que a variável $T$ está vinculada a idade $x$.**

$b_T = 1.u.m, \quad i = 4\%.$

$\boldsymbol{x}$:Idade da coorte

| $x$ | $q_x$ | $p_x$ | $l_x$ |
|---|---|---|---|
| | | ... | |
| 110 | 0,60392 | 0,39608 | 305,008 |
| 111 | 0,66819 | 0,33181 | 120,808 |
| 112 | 0,73948 | 0,26052 | 40,0852 |
| 113 | 0,81825 | 0,18175 | 10,443 |
| 114 | 0,90495 | 0,09505 | 1,89801 |
| 115 | 1,00000 | 0,00000 | 0,18041 |

$$\boldsymbol{q_x} = P(T_x \leq 1)$$

$$\boldsymbol{p_x} = P(T_x > 1)$$

$\boldsymbol{l_x}$: número de vivos a idade $x$
Do ponto de vista analítico, $l_x$ pode ser considerada uma função contínua e diferençável de $x$.

$$Z_t = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6\}$$

$$E(Z_T) = v^1P(T_{110} = 0) + v^2P(T_{110} = 1) + v^3P(T_{110} = 2) + v^4P(T_{110} = 3) + v^5P(T_{110} = 4) + v^6P(T_{110} = 5)$$

$$\boldsymbol{E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^{5} v^{t+1} P(T_{110} = t)}$$

**Importante:** $P(T_x = t)$ corresponde a probabilidade do tempo de vida adicional ser igual a $t$, no caso a probabilidade que indivíduo "morra" durante o intervalo $t$ e $t + 1$ é determinado que

$$P(t < T_x \leq t + 1) = P(T_x > t) - P(T_x > t + 1)$$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x - {}_{t+1} p_x$$

Lembrando da relação ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l p_{x+m}$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x - {}_t p_x \, {}_1p_{x+t}$$

$$P(t < T_x \leq t + 1) = {}_t p_x(1 - p_{x+t})$$

$$P(T_x = t) = ({}_t p_x)\,(q_{x+t}) = {}_{t|}\boldsymbol{q_x}$$

$$\boldsymbol{E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^{5} v^{t+1} ({}_t p_{110})\,(q_{110+t})}$$

$$E(Z_{T_{110}}) = \sum_{t=0}^{5} v^{t+1} P(T_{110} = t) = \sum_{t=0}^{5} v^{t+1} ({}_{t}p_{110})\,(q_{110+t})$$

$$E(Z_{T_{110}}) = v^{1}\,{}_{0}p_{110}q_{110} + v^{2}\,p_{110}q_{111} + v^{3}\,{}_{2}p_{110}q_{112} + v^{4}\,{}_{3}p_{110}q_{113} + v^{5}\,{}_{4}p_{110}q_{114} + v^{6}\,{}_{5}p_{110}q_{115}$$

$$\boldsymbol{E(Z_{T_{110}}) \approx 0,9403557 u.m.}$$

Sabendo que :

$${}_{0}p_{110} = 1$$

$${}_{3}p_{110} = \frac{l_{113}}{l_{110}} = (p_{110})(p_{111})(p_{112})$$

Seguro de vida de uma pessoa de idade $x$ com cobertura vitalícia e benefício unitário pago ao final do ano de morte do segurado

$$E\left(Z_{T_x}\right) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} P(T_x = t) = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} ({}_t p_x)\,(q_{x+t})$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} ({}_t p_x)\,(q_{x+t}) = E\left(Z_{T_x}\right)$$

$$A_{110} \approx 0{,}9403557 u.m.$$

# Observação

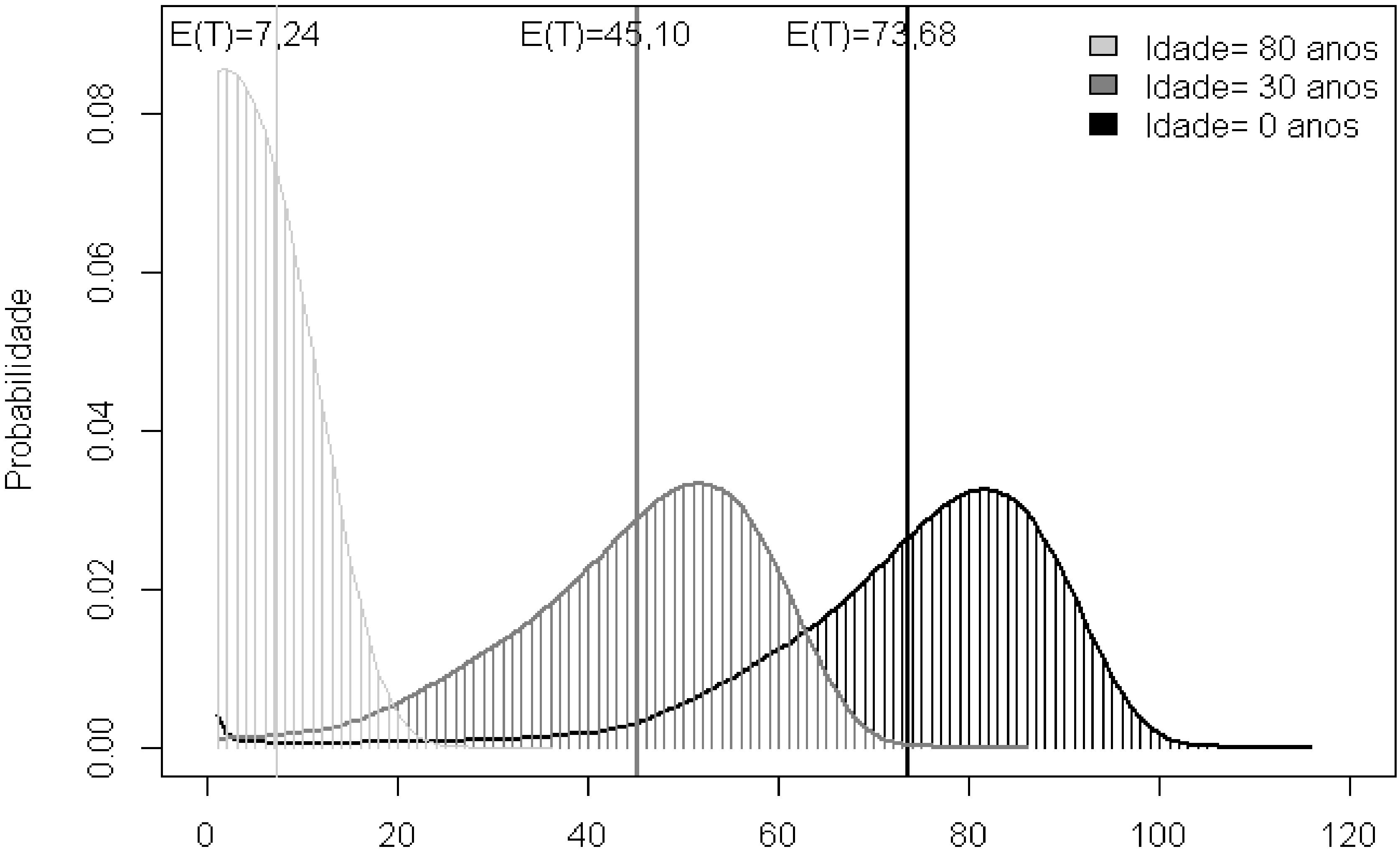
A expectativa de vida de uma pessoa de idade $x$, mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} t\ {}_tp_x q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tp_x$$

A expectativa de vida completa de uma pessoa de idade $x$, admitindo que a distribuição das mortes ao longo do ano é uniforme, é dada por:

$$e_x^0 = e_x + \frac{1}{2}$$

# Probabilidades AT-49 M



# Probabilidades AT-49 M

# SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- O pagamento ocorre desde que o sinistro ocorra dentro de um período estipulado.

- Como calcular do VPA desse Benefício?

  - Calcular a esperança matemática da variável aleatória “quanto devo ter hoje para pagar o benefício devido em relação a um segurado?”

**EXEMPLO 3:** Pense no caso de uma pessoa de 25 anos que deseja fazer um seguro onde caso este segurado faleça nos próximos 5 anos, o seu beneficiário receberá uma quantia de $1.u.m$. Considere também uma taxa de juros de $4\%$ ao ano e as seguintes probabilidade de morte. Calcule o valor esperado da função valor presente.

| Idade | $q_x$ |
|---|---|
| 25 | 0,00077 |
| 26 | 0,00081 |
| 27 | 0,00085 |
| 28 | 0,00090 |
| 29 | 0,00095 |
| 30 | 0,00100 |
| 31 | 0,00107 |
| 32 | 0,00114 |
| 33 | 0,00121 |
| 34 | 0,00130 |
| 35 | 0,00139 |

Resp.:

$$b_T = \begin{cases} 1\,, t = 0,1,2,\ldots,4 \\ 0,\ \text{caso contrário} \end{cases}$$ → Função benefício;

$$v_T = v^{t+1}\,, t \geq 0$$ → Função desconto;

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, \quad T = 0,1,\ldots,4 \\ \quad 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$ → Função valor presente.

**Obs. É normal o uso de $T_x$ para indicar que a variável $T$ está vinculada a idade $x$**

$b_T = 1. u. m.,\qquad i = 4\%.$

| $x$ | $q_x = {}_1q_x$ | $p_x = {}_1p_x = 1 - q_x$ | $l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$ |
|---|---|---|---|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 |
| 34 | 0,00130 | 0,99870 | 99131 |
| 35 | 0,00139 | 0,99861 | 99002 |

$$Z_t = \{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, 0\}$$

$$E(Z_T) = v^1P(T_{25} = 0) + v^2P(T_{25} = 1) + v^3P(T_{25} = 2) + v^4P(T_{25} = 3) + v^5P(T_{25} = 4) + [0P(T_{25} = 5) + \cdots]$$

$$E(Z_T) = v^1P(T_{25} = 0) + v^2P(T_{25} = 1) + v^3P(T_{25} = 2) + v^4P(T_{25} = 3) + v^5P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1\ {}_0p_{25}q_{25} + v^2\ p_{25}q_{26} + v^3\ {}_2p_{25}q_{27} + v^4\ {}_3p_{25}q_{28} + v^5\ {}_4p_{25}q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 \left(\frac{l_{27}}{l_{25}}\right) q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 \left(\frac{l_{28}}{l_{25}}\right) q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 \left(\frac{l_{29}}{l_{25}}\right) q_{29}$$

$$E(Z_T) = \left(\frac{1}{1{,}04}\right) 0{,}00077 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 0{,}99923\, 0{,}00081 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^3 0{,}99842\, 0{,}00085 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 0{,}99757\, 0{,}00090 + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 0{,}99667\, 0{,}00095$$

$$E\left(Z_{T_{25}}\right) \approx 0{,}003788\, u.m.$$

Outra opção seria:

$$b_T = \begin{cases} 1\,, & t = 0,1,2,3,4 \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases} \qquad v_T = v^{t+1}\,, t \geq 0 \qquad Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,2,3,4 \\ 0\,, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$VPA = E(Z_T)$$

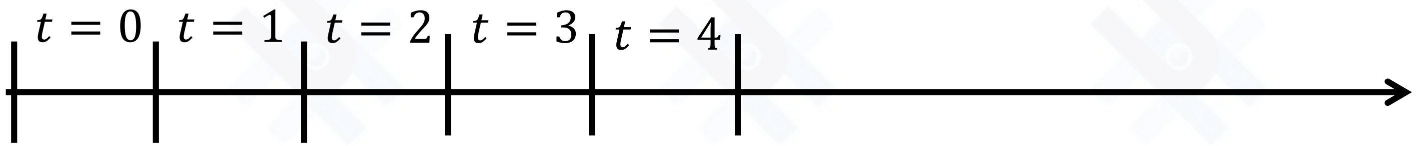
---

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3\, {}_2p_{25} q_{27} + v^4\, {}_3p_{25} q_{28} + v^5\, {}_4p_{25} q_{29}$$

Como ${}_{m+l}p_x = {}_m p_x \times {}_l\, p_{x+m}$ , então:

$$E(Z_T) = v^1 q_{25} + v^2\, p_{25} q_{26} + v^3 p_{25} p_{26} q_{27} + v^4 p_{25} p_{26} p_{27} q_{28} + v^5 p_{25} p_{26} p_{27} p_{28} q_{29}$$

$$E(Z_T) \approx 0{,}003788\, u.m.$$




$$E(Z_T) = v^1 P(T_{25} = 0) + v^2 P(T_{25} = 1) + v^3 P(T_{25} = 2) + v^4 P(T_{25} = 3) + v^5 P(T_{25} = 4)$$

| $\boldsymbol{x}$ | T. vida adicional | $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{t}}$ | $\boldsymbol{S_T(t) = {}_t p_x}$ | $F_T(t) = {}_1 q_x$ |
|---|---|---|---|---|
| 25 | $t = 0$ | $v$ | $T_{25} > 0$ | $T_{25} \leq 1$ |
| 26 | $t = 1$ | $v^2$ | $T_{25} > 1$ | $T_{25} \leq 2$ |
| 27 | $t = 2$ | $v^3$ | $T_{25} > 2$ | $T_{25} \leq 3$ |
| 28 | $t = 3$ | $v^4$ | $T_{25} > 3$ | $T_{25} \leq 41$ |
| 29 | $t = 4$ | $v^5$ | $T_{25} > 4$ | $T_{25} \leq 5$ |

$$E(Z_T) = \sum_{t=0}^{4} v^{t+1} \ {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0{,}003788 \ u.m.$$

Seguro de vida de uma pessoa de idade $x$ com cobertura de $n$ anos, com benefício unitário pago ao final do ano de morte do segurado.

$$E(Z_{T_x}) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} P(T_x = t) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} ({}_t p_x)\,(q_{x+t})$$

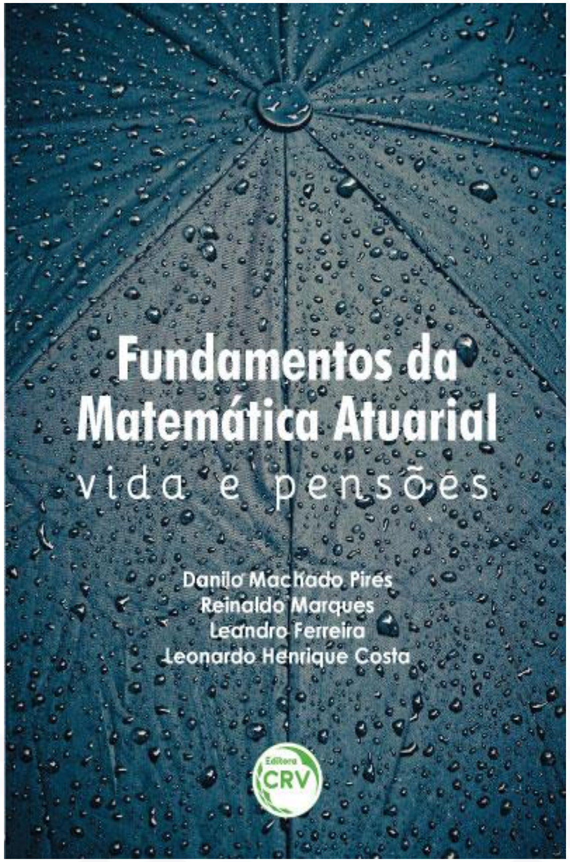
$$A_{x^1:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} ({}_t p_x)\,(q_{x+t}) = E(Z_{T_x})$$

"1" acima do "$x$" indica que o seguro é pago se "$x$" expirar antes que "$n$".

$$A_{25^1:\overline{5}|} \approx 0{,}003788\, u.m$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/


- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial - Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

# Matemática atuarial

## Seguros Aula 5

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

**Exemplo 1:** Uma pessoa de $25$ anos deseja fazer um seguro de **vida inteiro** que paga $1\,u.m.$ ao fim do ano de morte. O tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em $5\%$ ao ano. Qual deverá ser o prêmio puro único pago por esse segurado?

# Exemplo 1:

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \, {}_t p_x q_{x+t}$$

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left(\frac{1}{1,05}\right)^{t+1} \, {}_t p_{25} q_{25+t}$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^{1} q_{25} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{2} \, p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{3} \, {}_2 p_{25} q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1,05}\right)^{91} \, {}_{90} p_{25} q_{115} \approx 0,11242$$

# Exemplo 1:

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{1} q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{2} p_{25} q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{3} {}_{2}p_{25} q_{27} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{91} {}_{90}p_{25} q_{115} \approx 0{,}11242$$

$$A_{25} = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{1} 1 q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{2} p_{25} q_{26} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{91} (p_{25} p_{26} p_{27} \ldots p_{114}) q_{115} \approx 0{,}11242$$

**Exemplo 2:** A seguradora irá pagar um benefício de 1 u.m. por um seguro temporário caso o segurado de 105 anos faleça dentre um período de 4 anos. Considere uma taxa de juros de 4% ao ano e tábua At-2000 Masculina. Calcule o prêmio puro único:

| | $x$ | $q_x$ | $p_x$ |
|---|---|---|---|
| 106 | 105 | 0.37240 | 0.62760 |
| 107 | 106 | 0.40821 | 0.59179 |
| 108 | 107 | 0.44882 | 0.55118 |
| 109 | 108 | 0.49468 | 0.50532 |
| 110 | 109 | 0.54623 | 0.45377 |
| 111 | 110 | 0.60392 | 0.39608 |
| 112 | 111 | 0.66819 | 0.33181 |
| 113 | **112** | 0.73948 | 0.26052 |
| 114 | 113 | 0.81825 | 0.18175 |
| 115 | **114** | 0.90495 | 0.09505 |
| 116 | 115 | 1.00000 | 0.00000 |

$$A_{105^1:\overline{4}|} = v^1\ {}_0p_{105}q_{105} + v^2 p_{105}q_{106} + v^3\ {}_2p_{105}q_{107} + v^4\ {}_3p_{105}q_{108}$$

$$A_{105^1:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1}\ {}_tp_{105}q_{105+t}$$

$$v = \{v^1, v^2, v^3, v^4\}$$

$$pxx = \{\ {}_0p_{105}, p_{105}, \ {}_2p_{105}, \ {}_3p_{105}\}$$

$$qxx = \{q_{105}, q_{106}, q_{107}, q_{108}\}$$

$$A_{105^1:\overline{4}|} = \sum_{t=0}^{3} v^{t+1} \, {}_tp_{105} q_{105+t}$$

#Função que recebe como entrada, a taxa de rentabilidade($i$) anual, a idade do segurado (idade), o numero de anos de cobertura($n$) e o valor do benefício ($b$).

| | $x$ | $q_x$ | $p_x$ |
|---|---|---|---|
| 106 | **105** | 0.37240 | 0.62760 |
| 107 | **106** | 0.40821 | 0.59179 |
| 108 | **107** | 0.44882 | 0.55118 |
| 109 | **108** | 0.49468 | 0.50532 |
| 110 | 109 | 0.54623 | 0.45377 |
| 111 | 110 | 0.60392 | 0.39608 |
| 112 | 111 | 0.66819 | 0.33181 |
| 113 | **112** | 0.73948 | 0.26052 |
| 114 | 113 | 0.81825 | 0.18175 |
| 115 | **114** | 0.90495 | 0.09505 |
| 116 | 115 | 1.00000 | 0.00000 |

```
AX<- function( i, idade, n,b,k)  {
        v     <- (1/(i+1))^(k(1:n))
        pxx <-  c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
```
$\# \ 1, p_{105}, {}_2p_{105}, {}_3p_{105}$
```
        qxx <- qx[(idade+1):(idade+n)]
```
$\# \ q_{105}, q_{106}, q_{107}, q_{108}$
```
        AX   <- b* sum(v*pxx*qxx)
        return (AX)
                              }
```

$A_{105^1:\overline{4}|}$= AX(0.04,105,4,1,1)

## SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \,{}_t p_x q_{x+t}$$

$A_{x^1:\overline{n|}}$= AX(i,x,n,b,1)

## SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \,{}_t p_x q_{x+t}$$

$A_x$= AX(i,x,max(x)-x,b,1)

# Expectativa de vida

$$e_0 = \sum_{t=0}^{\omega - x} t \; {}_t p_x q_{x+t}$$

```
ex<- function(idade)  {
        n     <- max(Idade)-idade
        pxx <-  c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)]) )
        qxx <- qx[(idade+1):(idade+n)]
        t     <- 1:n
        ex    <- sum(t*pxx*qxx)
        return (ex)
                }
```

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$\boldsymbol{A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T \; {}_tp_x q_{x+t}}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \; {}_tp_x q_{x+t}}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$\boxed{E(Z_T)}$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

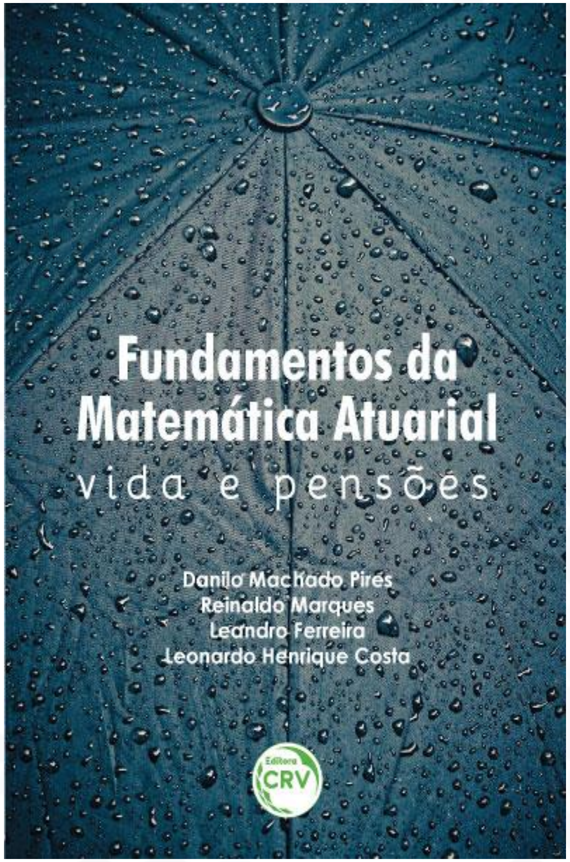
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.

- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial - Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

# Matemática atuarial

## Seguros Aula 6

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

# Seguro de vida pago no momento da morte

Seja $T$ ou $T_0$ a variável aleatória associada ao tempo de vida adicional de um indivíduo recém nascido (de idade $0$). Então a função de sobrevivência, $S_{T_0}(t)$, é a probabilidade desse indivíduo viver além da idade futura $t$, tal que:

$$S_{T_0}(t) = 1 - F_{T_0}(t) = P(T_0 > t) \qquad \text{ou} \qquad S_T(t) = 1 - F_T(t) = P(T > t)$$

Seja $T_x$ a variável aleatória tempo de vida adicional do indivíduo de idade $x$. Então a função de sobrevivência, $S_{T_x}(t)$, é a probabilidade de viver além da idade futura $t$.

$$S_{T_x}(t) = 1 - F_{T_x}(t) = P(T_x > t)$$

# Seguro de vida pago no momento da morte

- A probabilidade de uma pessoa de idade $x$ atingir (viva) a idade $x+t$, é dada por:

$$ {}_tp_x = S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > t + x | T_0 > x) $$

$$ {}_tp_x = \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)} = \frac{P(T > t + x)}{P(T > x)} $$

- A probabilidade de uma pessoa de idade $x$ morrer antes de atingir a idade $x+t$, é dado por:

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)} = F_{T_x}(t) $$

Logo:

$$ {}_tq_x + {}_tp_x = 1 $$

# Observação

A expectativa de vida de uma pessoa de idade $x$, mede quantos anos em média uma pessoa sobrevive a partir dessa idade.

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega - x} t f_{T_x}(t) dt = \int_0^{\omega - x} {}_t p_x \, dt$$

# Observação

$$e_x = E(T_x) = \int_0^{\omega - x} t f_{T_x}(t)dt = -\int_0^{\omega - x} t \frac{d\left( {}_t p_x \right)}{dt} dt$$

Lembre-se que do ponto de vista analítico $l_x$ pode ser vista como uma função contínua e diferenciável em $x$, então:

$$e_x = -\int_0^{\omega - x} t\, d\left( \frac{l_{x+t}}{l_x} \right) = -\int_0^{\omega - x} t \frac{1}{l_x} d(l_{x+t})$$

Fazendo $u = t$ e $-\frac{1}{l_x} d(l_{x+t}) = dv$ logo $du = dt$ e $-\frac{l_{x+t}}{l_x} = v$ , assim

$$e_x = -t \frac{l_{x+t}}{l_x}\Bigg|_0^{\omega - x} + \int_0^{\omega - x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt = \int_0^{\omega - x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt$$

$$e_x = \int_0^{\omega - x} {}_t p_x \, dt$$

**Exemplo 1:** Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

Calcule $e_0$, ${}_tp_x$ e ${}_tq_x$.

**Exemplo 1:** Nota-se que para $T_0 \sim U_c(0{,}140)$ , implica aceitar que $e_0 = E(T_0) = \frac{140}{2}$, pois:

$$e_0 = \int_0^{140} t\left(\frac{1}{140}\right)dt$$

$$e_0 = \left[\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{140}\right)\right]_{t=0}^{t=140} = \frac{140^2}{2}\left(\frac{1}{140}\right) = \frac{140}{2}$$

$$e_0 = 70 \text{ anos}$$

## Exemplo 1

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = {}_t p_x$$

$$S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x)$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T_0 > x + t, T_0 > x)}{P(T_0 > x)} = \frac{P(T > x + t, T > x)}{P(T > x)}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > x)} = \frac{\int_{x+t}^{140} \frac{1}{140} dt}{\int_{x}^{140} \frac{1}{140} dt} = \frac{\frac{140 - (x + t)}{140}}{\frac{140 - (x)}{140}} = \frac{140 - x - t}{140 - x}$$

$$\boldsymbol{{}_t p_x = \frac{140 - x - t}{140 - x}} \qquad \boldsymbol{{}_t q_x = 1 - \frac{140 - x - t}{140 - x} = \frac{t}{140 - x}}$$

**Exemplo 1**

$$ {}_{t}p_{x} = \frac{140-x-t}{140-x} \rightarrow {}_{t}\,p_{0} = \frac{140-t}{140} $$

$$ e_0 = \int_0^{140} \frac{140 - t}{140} dt $$

$$ e_0 = t - \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{140}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=140} = 70 \text{ anos} $$

# Força de mortalidade

- A força de mortalidade é a taxa na qual as pessoas em uma determinada população estão morrendo em um período de tempo específico.
  - Função hazard $h(x)$
  - Taxa instantânea de ocorrência de um evento em certo momento dado que o evento ainda não ocorreu.
  - Valor pequeno para função implica em unidade exposta a menor quantidade de risco...
  - É uma ferramenta poderosa que ajuda a quantificar e gerenciar a incerteza e o perigo em diversas áreas.

# Força de mortalidade

A força de mortalidade -transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se pelo limite:

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0} \frac{{}_h q_x}{h}$$

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{P(T_x \leq h)}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{1 - P(T_x > h)}{h} \right]$$

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{1 - \frac{P(T_0 > x + h)}{P(T_0 > x)}}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{1 - \frac{S_{T_0}(x + h)}{S_0(x)}}{h} \right]$$

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{S_{T_0}(x) - S_{T_0}(x + h)}{h\, S_{T_0}(x)} \right]$$

# Força de mortalidade

$$\ldots$$

$$\mu(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1-\frac{P(T_0 > x+h)}{P(T_0 > x)}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1-\frac{S_{T_0}(x+h)}{S_{T_0}(x)}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{S_{T_0}(x) - S_{T_0}(x+h)}{h\,S_{T_0}(x)}\right]$$

$$\mu(x) = -\frac{1}{S_{T_0}(x)}\lim_{h\to 0}\left[\frac{S_{T_0}(x+h) - S_{T_0}(x)}{h}\right]$$

$$\boldsymbol{\mu(x) = -\frac{S'_{T_0}(x)}{S_{T_0}(x)}}$$

$\mu(x)$ é a força de mortalidade, calculada no momento $x$ a partir da idade $0$.

# Força de mortalidade

A força de mortalidade - transição instantânea do estado vivo para o morto, e define-se por:

$$\mu(x) = -\frac{S'_{T_0}(x)}{S_{T_0}(x)}$$

- É uma medida relativa da mortalidade em que a idade $x$ é atingida, enquanto $q_x$ mede a mortalidade ao logo do ano.

- $\mu(x) \geq 0.$

- $\mu(x)$ não necessariamente é menor que $1.$

- $\mu(x)dx$ representa a probabilidade de morte no intervalo infinitesimal $(0, dx).$

# Força de mortalidade

Importante notar que:

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}\left( {}_t q_x \right)$$

$$f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}(1 - {}_t p_x) = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}\right)$$

$$f_{T_x}(t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}$$

$$f_{T_x}(t) = -\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)} \times \frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)} = \left[-\frac{S'_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x+t)}\right]\frac{S_{T_0}(x+t)}{S_{T_0}(x)}$$

$$\boldsymbol{f_{T_x}(t) = \mu(x+t)({}_t p_x)}$$

**EXEMPLO 2:** Suponha que o tempo de vida adicional da pessoa ao nascer, possa ser modelada por meio da função de densidade:

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{140} I_{[0,140]}(t)$$

Calcule $\mu(x + t)$. Lembrando do exercício anterior que:

$$_{t}p_x = \frac{140-x-t}{140-x} \qquad _{t}q_x = \frac{t}{140-x}$$

## EXEMPLO 2

$$ {}_tp_x\mu(x+t) = f_{T_x}(t) $$

Então:

$$ {}_tq_x = \frac{1}{140-x} = F_{T_x}(t) $$

Considerando que $\frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = f_{T_x}(t)$, assim:

$$ \frac{dF_{T_x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{140-x}\right) = \frac{1}{140-x} = f_{T_x}(t) $$

Logo

$$ \mu(x+t) = \frac{\frac{1}{140-x}}{\frac{140-x-t}{140-x}} = \frac{1}{140-x-t} $$

# Seguro de vida pago no momento da morte

Importante notar que:

$$ {}_{n}p_{x} = e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt} $$

e

$$ {}_{n}q_{x} = 1 - e^{-\int_0^n \mu(x+t)dt} $$

Em que $\mu(x+t)$ é a força de mortalidade, calculada quando o tempo $T$ passa a ser contato a partir da idade $x$.

# Leis de mortalidade

## Lei de Gompertz

$$\mu(x+t) = Bc^{x+t} \quad \rightarrow \quad {}_tp_x = g^{c^{x+t}-c^x}$$

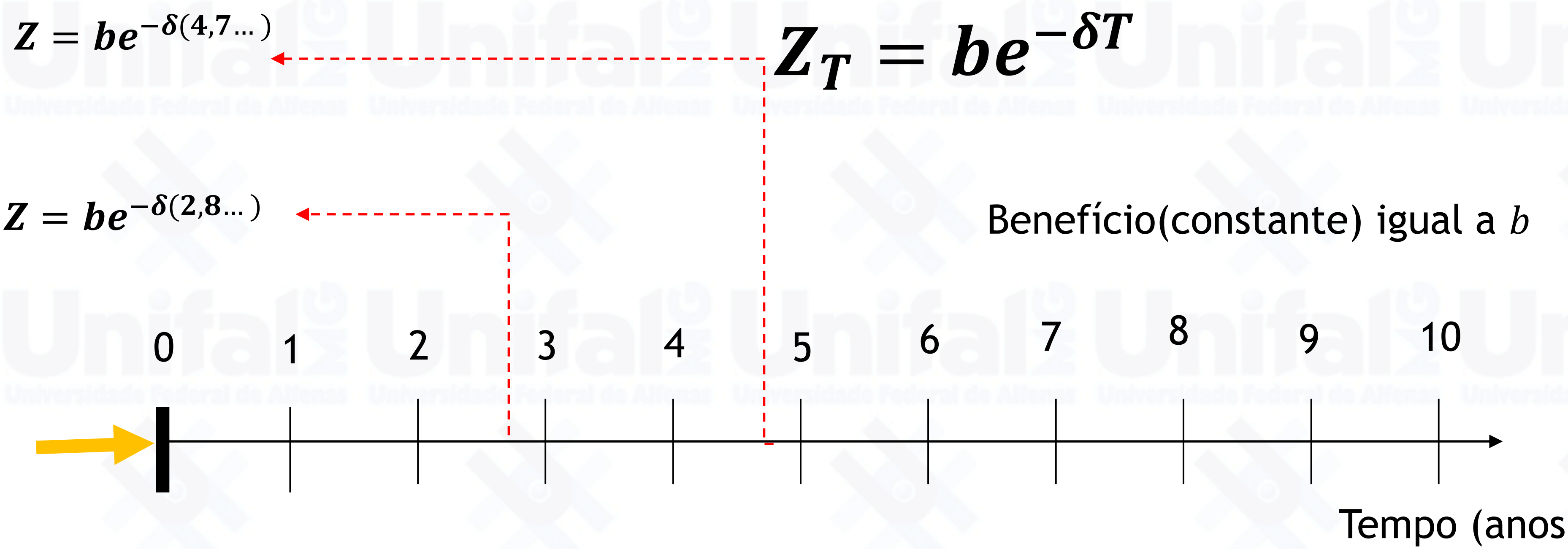
## Lei de Makeham

$$\mu(x+t) = A + Bc^{x+t} \rightarrow \quad {}_tp_x = e^{-At} g^{c^{x+t}-c^x}$$

Em que: $g = e^{-\frac{B}{\ln(c)}}$

$$0{,}001 < A < 0{,}003$$
$$0{,}00001 < B < 0{,}001$$
$$1{,}06 < c < 1{,}12$$

# Seguro de vida pago no momento da morte




Considerando que não existe despesas administrativas, imposto e lucro, o valor a ser cobrado deveria ser valor esperado de $b_t e^{-\delta T}$, logo:

$$E(VP) = E\left(be^{-\delta T}\right) = bE\left(e^{-\delta T}\right)$$

Lembrando que $\delta = ln(1+i)$.

| SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO | SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO |
| --- | --- |

$T_x$ Contínuo

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z_t f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z_t f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

**EXEMPLO 3:** Considere que a função de sobrevivência e força de mortalidade de $x = 30$ em dada população seja de:

$$ {}_t p_{30} = \frac{70-t}{70} \quad \text{e} \quad \mu(30+t) = \frac{1}{70-t} \ \text{para } t > 0 $$

Esse indivíduo decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que a taxa de rentabilidade constante, e suponha que $i = 5\%$ ao ano.

Calcule o VPA (prêmio puro único) que paga $1\, u.m.$ de benefício pago no momento da morte do segurado.

# EXEMPLO 3

$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}}$ $\quad i = 5\%$ ao ano. $\quad v = e^{-\,ln(1{,}05)}$

$b = 1\ ,0 \leq t \leq 20 \quad v_t = e^{-\delta t}\,,0 \leq t \leq 20 \quad Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq 20 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases}$

# EXEMPLO 3

$$VPA = E(Z_T) = \bar{A}_{30^1:\overline{20|}}$$

$b = 1 \ , 0 \leq t \leq 20 \qquad v_t = e^{-\delta t}, 0 \leq t \leq 20 \qquad Z_T = e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq 20$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \int_0^{20} e^{-\delta t} f_{T_{30}}(t)dt = \int_0^{20} e^{-\delta t} \ {}_tp_{30}\mu(30+t)dt = \int_0^{20} e^{-\delta t}\frac{1}{70}dt$$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)}\Bigg|_{t=0}^{t=20} = \frac{1}{-70\delta}\left[e^{20(-\delta)} - e^{0(-\delta)}\right]$$

Como $\delta = ln(1{,}05)$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} = \frac{1}{-3{,}4153}(e^{-0{,}9758} - 1) \approx 0{,}182446$$

**EXEMPLO 3**

Veja que, é suficiente para o segurado pagar $0{,}182446\,u.m.$ hoje de forma a receber (o beneficiário) $1{,}00\,u.m.$ na ocorrência de sinistro.

O exemplo considerou que o benefício seria de $1\,u.m.$, e caso o segurado contratasse um seguro que paga $\$\,250000{,}00$ reais no momento de morte? Quanto deveria ser o prêmio puro único pago por ele???

$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}}$ ,  $T_{30} \sim U_c(0,70)$ e  $i = 5\%$ a.a.  $v = e^{-ln(1,05)t}$

$$b = 2500000.$$

$$\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} \approx 0,182446$$

$$250000\ \bar{A}_{30^1:\overline{20|}} \approx 45611,53$$

Caso o valor do benefício seja $\$\,250000{,}00$, o prêmio a ser pago pelo segurado deverá ser (arredondando no centavo) de $\$45611{,}53$ (considerando a mesma taxa de juros).

**EXEMPLO 4:** Para proteger seu filho de 5 anos, uma pessoa de 30 anos decide fazer um contrato de seguro de vida temporário com benefício variável no tempo (Considere distribuição $T_{30} \sim U_c(0,70)$). Considere $i = 5\%$ ao ano.

I) Se morrer dentro de 10 anos o benefício será de $\$100000{,}00$.

II) Se morrer entre 10 e 20 anos, o benefício será: $150000 - 5000t$.

**EXEMPLO 4:** Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$Z_T = b_T e^{-\delta T} = \begin{cases} 100000\, e^{-\delta T}, & T \leq 10 \\ \\ (150000 - 5000T)e^{-\delta T}, & 10 < T \leq 20 \end{cases}$$

Portanto:

$$VPA = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\delta t}}{70} dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\delta t}}{70} dt$$

$$VPA = VPA_1 + VPA_2$$

$$VPA_1 = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\delta t}}{70} dt$$

$$VPA_1 = \left.\frac{10000e^{-\delta t}}{7(-\delta)}\right|_{t=0}^{t=10} = \frac{10000e^{-0,4879} - 10000}{-0,34153}$$

$$VPA_1 \approx 11304,59$$

# EXEMPLO 4

$$VPA_2 = \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\delta t}}{70} dt$$

Por partes:

$$\int udr = ur - \int rdu$$

então

$$u = 150000 - 5000t; \quad \rightarrow \quad du = -5000dt$$

$$dr = \frac{e^{-\delta t}}{70} dt \quad \rightarrow \quad r = \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)}$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t) \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} \Bigg|_{t=10}^{t=20} - \int_{10}^{20} - \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} 5000dt$$

# EXEMPLO 4

$$VPA_2 = \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\delta t}}{70} dt$$

$$\cdots$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t)\frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)}\Bigg|_{t=10}^{t=20} + \int_{10}^{20} \frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)} 5000dt$$

$$VPA_2 = (150000 - 5000t)\frac{e^{-\delta t}}{70(-\delta)}\Bigg|_{t=10}^{t=20} + \frac{e^{-\delta t}}{7(-\delta)^2} 500\Bigg|_{t=10}^{t=20}$$

$$VPA_2 = \frac{5000e^{-0,04879(20)} - 10000e^{-0,04879(10)}}{7(-0,04879)} + \frac{500\left(e^{-0,04879(20)} - e^{-0,04879(10)}\right)}{7(-0,04879)^2}$$

$$VPA_2 \approx 12457,73 - 7112,165 \approx 5345,565$$

**Exemplo 4:** Veja que, para esse caso, o benefício é diferente dependendo do momento de morte do segurado, então:

$$VPA = \int_0^{10} \frac{100000e^{-\ln(1,05)t}}{70}dt + \int_{10}^{20} \frac{(150000 - 5000t)e^{-\ln(1,05)t}}{70}dt$$

$$VPA = VPA_1 + VPA_2$$

$$VPA = 11304,59 + 5345,565 \approx \$16650,15$$

## SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO

- $T_x$ Contínuo

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z_t f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

- $T_x$ discreto

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}$$

## SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO

- $T_x$ Contínuo

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty Z_t f_{T_x}(t)dt$$

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

- $T_x$ discreto

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_t P(T_x = t)$$

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}$$

$$Z_T = v^{T+1}, T \geq 0$$

$$\boldsymbol{A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} Z_T \ {}_t p_x q_{x+t}}$$

$$Z_T = \begin{cases} v^{T+1}, T = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad c.c. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A_{x^1:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} Z_T \ {}_t p_x q_{x+t}}$$

$$P(T_x = t) = {}_t p_x \, q_{x+t}$$

$$\boxed{E(Z_T)}$$

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t)$$

$$Z_T = e^{-\delta T}, T \geq 0$$

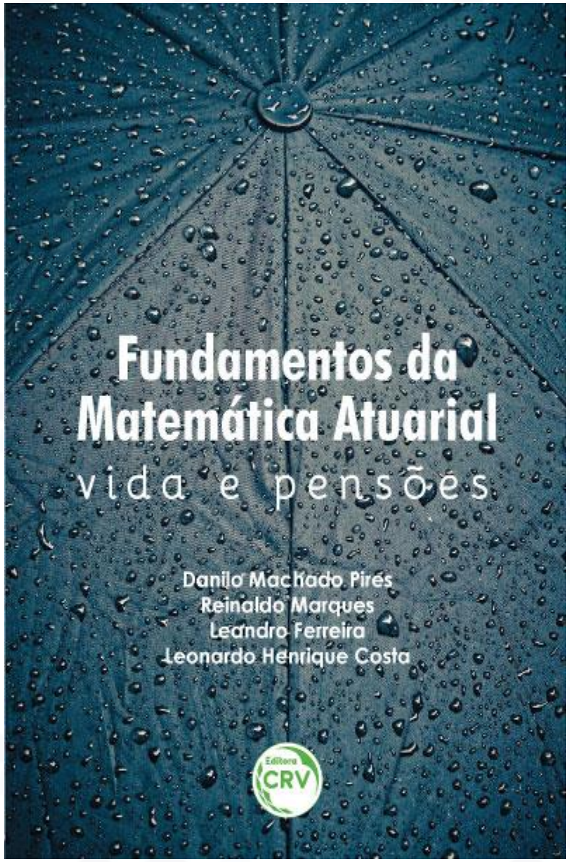
$$\boldsymbol{\bar{A}_x = \int_0^\infty Z_T \ {}_t p_x \mu(x+t) dt}$$

$$Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, 0 \leq T \leq n \\ \quad 0, \qquad\quad c.c \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\bar{A}_{x^1:\overline{n|}} = \int_0^n Z_T \ {}_t p_x \mu(x+t) dt}$$

- **Portal Halley :** [https://atuaria.github.io/portalhalley/](https://atuaria.github.io/portalhalley/)


- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial - Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

# Matemática atuarial

## Seguros Aula 7

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley/

## Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Uma característica importante de uma variável aleatória é sua variabilidade:
  - Em geral, é avaliada pela discrepância de seus valores em relação à média ou à mediana.
  - A média dos desvios é sempre zero e, portanto, nada informativa.

- Tomando o quadrado dos desvios e, então, calculando o valor esperado, chegamos a uma das mais importantes medidas de variabilidade.

# Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- A definição matemática da variância de uma variável aleatória $Z_T$ é tal que:

$$var(Z_T) = E\{[Z_T - E(Z_T)]^2\}$$

- A raiz quadrada da variância é denominada de desvio-padrão e representado por $\sigma_{Z_T}$.

- Pode se calcular a variância também por:

$$var(Z_T) = E(Z_T^2) - E(Z_T)^2$$

# Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

Considerando $Z_T = bv^{T+1}$, uma função de variável aleatória e por consequência também uma variável aleatória, tem-se:

$$var(Z_T) = var(bv^{T+1}) = b^2 var(v^{T+1})$$

# Cálculo da variância: Seguro de vida temporário

- Caso de $T$ discreto: $var(Z_T) = {}^2A_{x^1:\overline{n|}} - \left(A_{x^1:\overline{n|}}\right)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{n-1} w^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} - \left[\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}\right]^2$$

$v^2 = w \rightarrow$ Fator de desconto

- Caso de $T$ contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_{x^1:\overline{n|}} - \left(\bar{A}_{x^1:\overline{n|}}\right)^2$

$$var(Z_T) = E\left(e^{-2\delta T}\right) - E\left(e^{-\delta T}\right)^2 = \int_0^n e^{-2\delta t} f_{T_x}(t)dt - \left[\int_0^n e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right]^2$$

# Cálculo da variância: Seguro de vida inteiro

- Caso de $T$ discreto: $var(Z_T) = {}^2A_x - (A_x)^2$

$$var(Z_T) = E(v^{2T+2}) - E(v^{T+1})^2 = \sum_{t=0}^{\omega-x} w^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t} - \left[\sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}\right]^2$$

$v^2 = w$ → Fator de desconto

- Caso de $T$ contínuo: $var(Z_T) = \overline{{}^2A}_x - (\bar{A}_x)^2$

$$var(Z_T) = E\left(e^{-2\delta T}\right) - E\left(e^{-\delta T}\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} f_{T_x}(t)dt - \left[\int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x}(t)dt\right]^2$$

| SEGURO DE VIDA TEMPORÁRIO | SEGURO DE INTEIRO OU VITALÍCIO |
| --- | --- |
| ➢ Caso discreto | ➢ Caso discreto |
| $$A_{x^1:\overline{n\vert}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}$$ | $$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1}\ {}_tp_x q_{x+t}$$ |
| $A_{x^1:\overline{n\vert}}$= AX(i,x,n,b,1) | $A_x$= AX(i,x,max(x)-x,b,1) |
| $var(Z)$= $\mathrm{AX}(i,x,n,b,2) - \mathrm{AX}(i,x,n,b,1)^2$ | $var(Z) = \mathrm{AX}(i,x,\max(x)-x,b,1) - \mathrm{AX}(i,x,\max(x)-x,b,1)^2$ |

**EXEMPLO 1:** Calcule a variância de $Z_T$.

$b = 1\ ,\ \ 0 \leq t < 5 \qquad v^{t+1}, t \geq 0 \qquad\qquad Z_T = \begin{cases} v^{T+1},\ 0 \leq T < 5 \\ \quad 0, \quad c.c. \end{cases}$

Lembramos que $A_{25^1:\overline{5|}} \approx 0{,}0037888$ para $i = 4\%$.

## Dados do **exemplo 1**

$\mathrm{i} = 4\%$

| Idade | $q_x$ | $p_x = 1 - q_x$ | $l_x = \frac{l_{x+1}}{p_x}$ |
|---|---|---|---|
| 25 | 0,00077 | 0,99923 | 100000 |
| 26 | 0,00081 | 0,99919 | 99923 |
| 27 | 0,00085 | 0,99915 | 99842 |
| 28 | 0,00090 | 0,99910 | 99757 |
| 29 | 0,00095 | 0,99905 | 99667 |
| 30 | 0,00100 | 0,99900 | 99572 |
| 31 | 0,00107 | 0,99893 | 99472 |
| 32 | 0,00114 | 0,99886 | 99365 |
| 33 | 0,00121 | 0,99879 | 99251 |
| 34 | 0,00130 | 0,99870 | 99131 |
| 35 | 0,00139 | 0,99861 | 99002 |

# EXEMPLO 1

$$var(Z_T) = \ {}^{2}A_{25^1:\overline{5}|} - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_t) = \sum_{t=0}^{4}\left[\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2\right]^{t+1} {}_{t}p_{25}q_{25+t} - (0{,}0037888\ )^2$$

$$var(Z_T\ ) = \left[\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^2 q_{25} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 {}_{1}p_{25}q_{26} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^6 {}_{2}p_{25}q_{27} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^8 {}_{3}p_{25}q_{28} + \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{10} {}_{4}p_{25}q_{29}\right] - (0{,}00337014\ )^2$$

$$var(Z_T) \approx 0{,}0033557$$

**EXEMPLO 2:** Considere que uma pessoa de $30$ anos decide fazer um seguro de vida temporário no período de 20 anos. Admita que o tempo de vida adicional desta pessoa possa ser modelado pela distribuição uniforme contínua de parâmetros $0$ e $70$, ou seja:

$$T_{30} \sim U_c(0{,}70).$$

Considere $i = 5\%$ ao ano.

Sabemos pela resolução do problema que $\bar{A}_{30^1:\overline{20|}} \approx 0{,}182446$. A partir dessas informações obtenha a variância para esse seguro.

# EXEMPLO 2

$b = 1, 0 \leq t \leq 20 \qquad e^{-\delta t}, t \geq 0 \qquad Z_T = \begin{cases} e^{-\delta T}, & 0 \leq T \leq 20 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$$var(Z_T) = \int_0^{20} e^{-2\delta t} \frac{1}{70} dt - 0{,}182446^2$$

$$var(Z_T) = \frac{1 - e^{-40\delta}}{140\delta} - 0{,}182446^2 \approx 0{,}09231757$$

$$\sigma_{Z_T} = \sqrt{0{,}09231757} \approx 0{,}3038381$$

# SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

Considere a situação em que uma pessoa de 30 anos deseja fazer um seguro que pague ao seu beneficiário no momento da morte um valor de $200 000,00. Para esse cálculo a seguradora considera uma taxa de rentabilidade anual de 5% e que o tempo de vida adicional do segurado seja modelado por um modelo uniforme contínua. Assim:

$T_{30} \sim U_c(0{,}70) \qquad i = 5\%\ \textit{ao ano} \qquad b_T = R\$200000{,}00$

$$VPA = \int_0^{70} z_T f_T(t)dt = \int_0^{70} 200000e^{-\ln(1{,}05)t}\frac{1}{70}dt$$

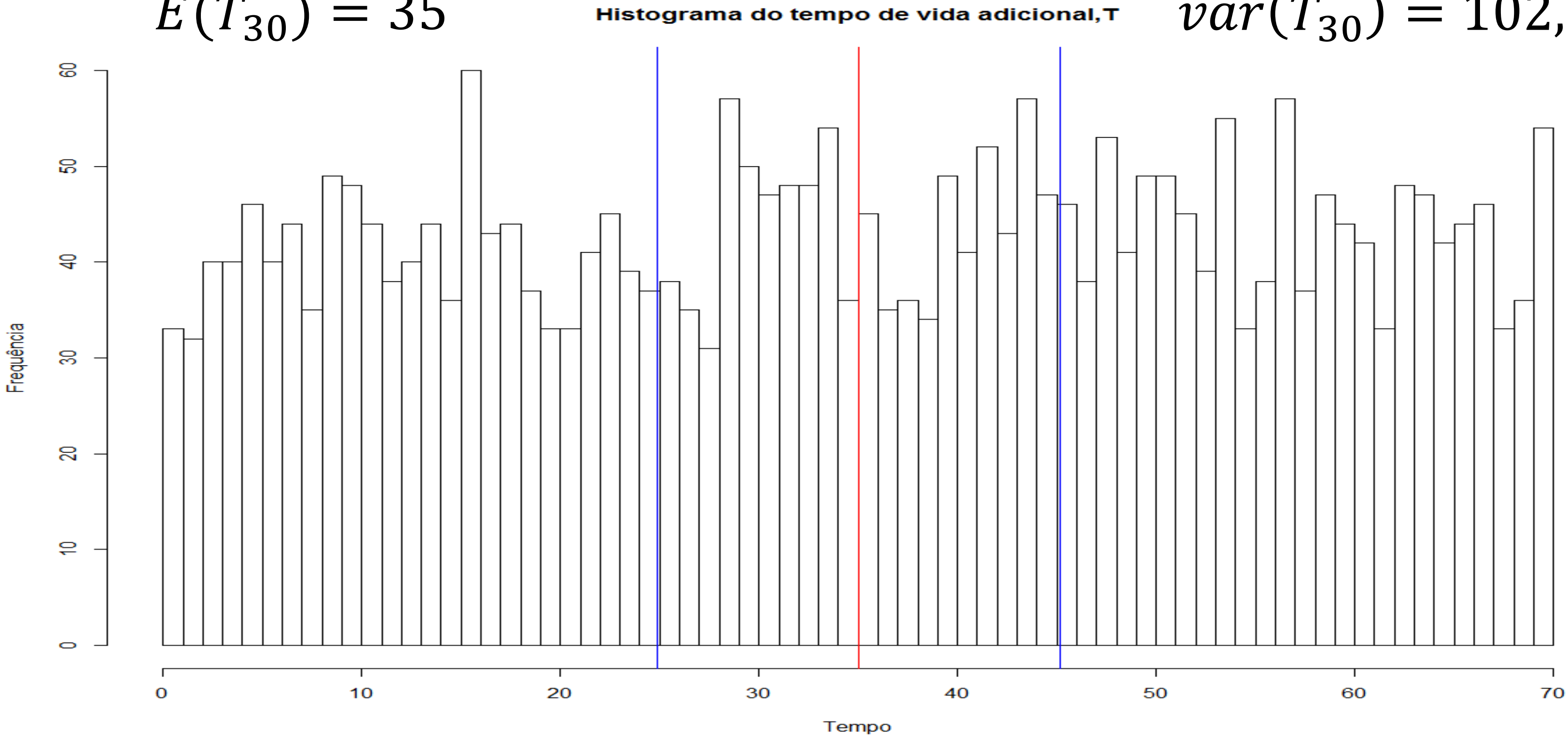
$$VPA = -\frac{200000e^{-ln(1{,}05)t}}{70\ ln1{,}05}\Bigg|_{t=0}^{t=70} = \frac{200000}{70\ ln\ 1{,}05}\left[-e^{-ln(1{,}05)70} + e^{-ln(1{,}05)0}\right]$$

$$\boldsymbol{VPA = 200000\bar{A}_{30} = 58559{,}81\left(-e^{-3{,}415} + 1\right) \approx 56634{,}57}$$

# SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

Considere agora que após um determinado tempo observando 3000 pessoas da mesma coorte que fizeram no mesmo ano um seguro de vida vitalício. Seja anotado o tempo gasto para que cada um venha a falecer.

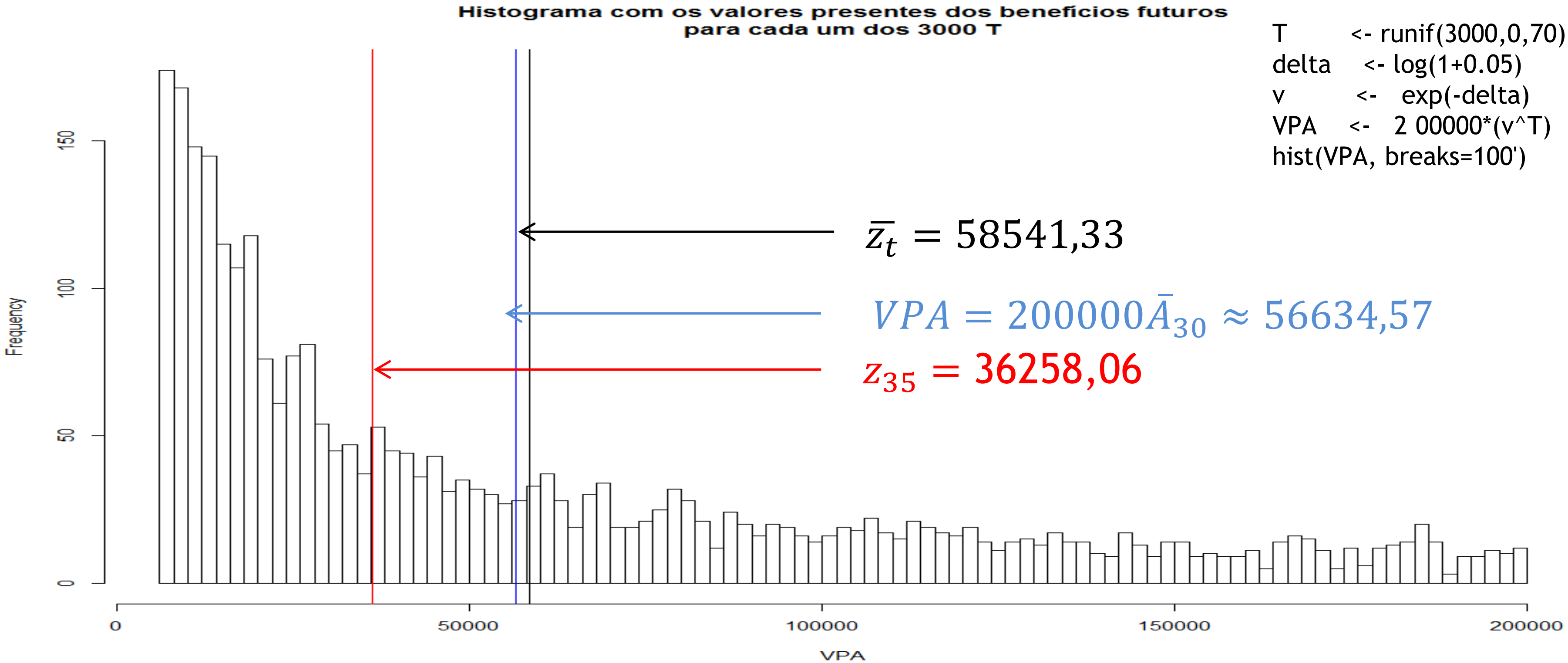
$E(T_{30}) = 35$ $\quad$ $var(T_{30}) = 102{,}83$



# SEGURO DE VIDA INTEIRO-Simulação

Levando em consideração que “sabemos” previamente a sobrevida de cada segurado (dados simulados). Os valores presentes necessários ao pagamento do benefício contratado por cada segurado pode ser calculada. Assim:

$$z_t = bv^t = 200000e^{-\delta t} = 200000e^{-\ln(1,05)t}$$




```
T       <- runif(3000,0,70)
delta    <- log(1+0.05)
v         <-   exp(-delta)
VPA     <-   2 00000*(v^T)
hist(VPA, breaks=100')
```

$\bar{z}_t = 58541{,}33$

$VPA = 200000\bar{A}_{30} \approx 56634{,}57$

$z_{35} = 36258{,}06$

| | |
|---|---|
| $n = 1865$ | $n = 1135$ |
| $n = 1838$ | $n = 1162$ |
| $n = 1459$ | $n = 1541$ |

- A distribuição Uniforme para modelar a sobrevida do segurado, leva a um valor de prêmio alto, pois essa supõem que chance da pessoa morrer “cedo” é igual a de morrer “tarde”.
- Apesar das limitações, a estimativa se mostrou próxima da média verificada *a posteriori*.
- *Devido a forte assimetria o valor obtido para $VPA$ está a direita da moda e mediana.*

# Prêmio calculado por percentil

- Considere um prêmio $\Pi_x$ de um seguro vitalício de forma que:

$$P\left(Z_{T_x} \leq \Pi_x\right) = \alpha$$

$$P\left(be^{-\delta T_x} \leq \Pi_x\right) = \alpha$$

$$P\left(e^{-\delta T_x} \leq \frac{\Pi_x}{b}\right) = \alpha$$

$$P\left(-\delta T_x \leq ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)\right) = \alpha$$

$$\boxed{P\left(T_x \geq -\frac{ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}\right) = \alpha}$$

# Prêmio calculado por percentil

$$P\left(Z_T \leq \Pi_{t_\alpha}\right) = \alpha$$

Como a variável aleatória de comportamento conhecido é o tempo $(T)$, é mais conveniente lidar com sua distribuição do que com a distribuição dos valor presente atuarial.

$$P(T_x \geq t_\alpha) = \alpha$$

$$P\left(T_x \geq -\frac{ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}\right) = \alpha$$

Assim:

$$t_\alpha = -\frac{ln\left(\frac{\Pi_x}{b}\right)}{\delta}$$

# Prêmio calculado por percentil

- Devido à variabilidade elevada, pode ser interessante calcular determinar o valor presente a partir de um quantil predeterminado.

- Obter um valor presente de baseado nas probabilidades dos benefícios futuramente pagos, serem inferiores ao estipulado.

**EXEMPLO 3:** Considere um seguro de vida vitalício feito por $x = 30$, com benefício igual a $\$200000$, dado que $T_{30} \sim U_c(0,70)$ e $i = 5\%$ ao ano. Qual seria o valor do prêmio $\Pi_{30}$ de forma que $P(Z_T \leq \Pi_{30}) = 0,9$?

**EXEMPLO 3**

$b = \$20000{,}00. \qquad T_{30} \sim U_c(0{,}70) \qquad i = 5\%$ ao ano $\qquad \alpha = 0{,}9$

$$P(T_{30} \geq t_{90\%}) = 0{,}9$$

$$P(T_{30} \geq t_{90\%}) = \int_{t_{90\%}}^{70} \frac{1}{70}\,dt = \boxed{\frac{70 - t_{90\%}}{70} = 0{,}9}$$

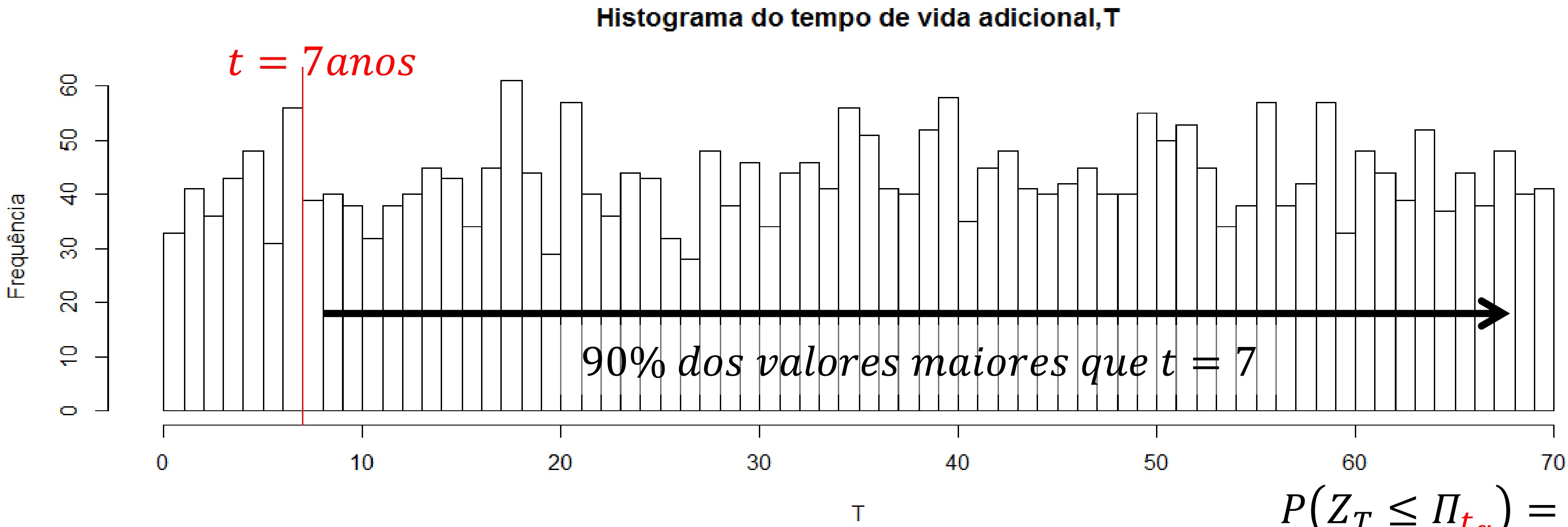
$$t_{90\%} = 7$$

$$P(T_{30} \geq 7) = 0{,}9$$

$$P(T_{30} \geq 7) = P\left(T_{30} \geq -\frac{ln\left(\frac{\Pi_{30}}{200000}\right)}{\ln(1{,}05)}\right) = 0{,}9$$

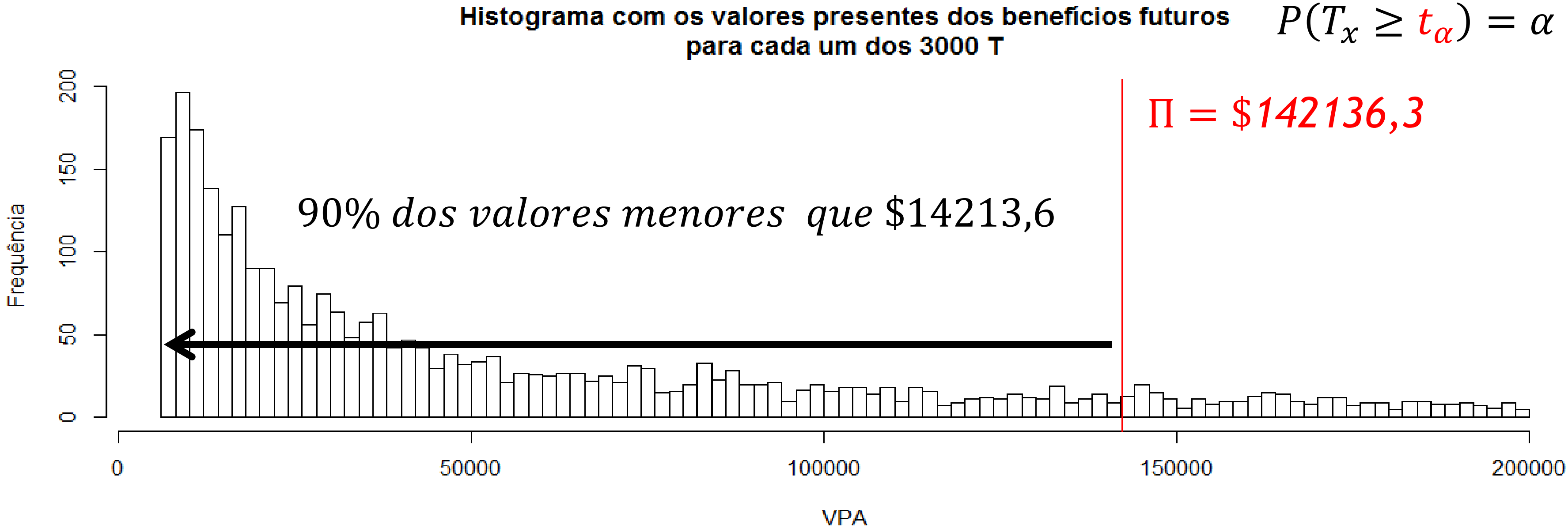
$$-\frac{ln\left(\frac{\Pi_{30}}{200000}\right)}{\ln(1{,}05)} = 7$$

$$\Pi_{30_{0,9}} \approx \$142136{,}3$$




$$P(Z_T \leq \Pi_{t_\alpha}) = \alpha$$

$$P(T_x \geq t_\alpha) = \alpha$$

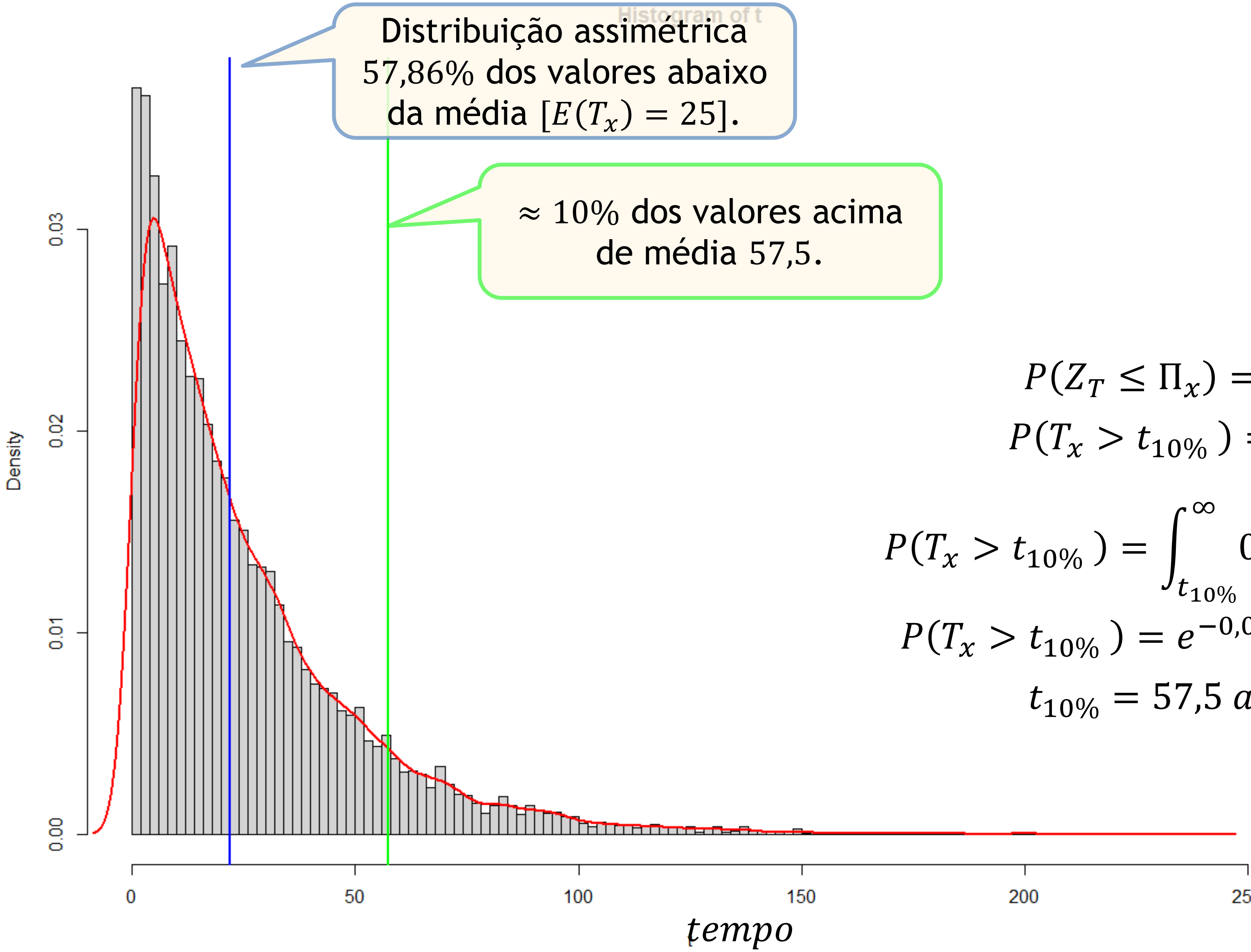



- Quanto maior o tempo de vida adicional menor o valor presente.
- Valores grandes de $t$ geram valores pequenos e próximos de VPA.

**EXEMPLO 4:** O segurado de idade $x$ decide fazer um seguro de vida vitalício com pagamento de benefício unitário no momento de sua morte. Considere a taxa instantânea de juros, $\delta = 0{,}06$ e que $T_x \sim Exp(0{,}04)$.

$$f_{T_x}(t) = 0{,}04e^{-0{,}04t}, \;\; t > 0$$

Determine o valor de $\Pi_x$ tal que $P(Z_T \leq \Pi_x) = 0{,}1$.




$$P(Z_T \leq \Pi_x) = 0{,}1$$

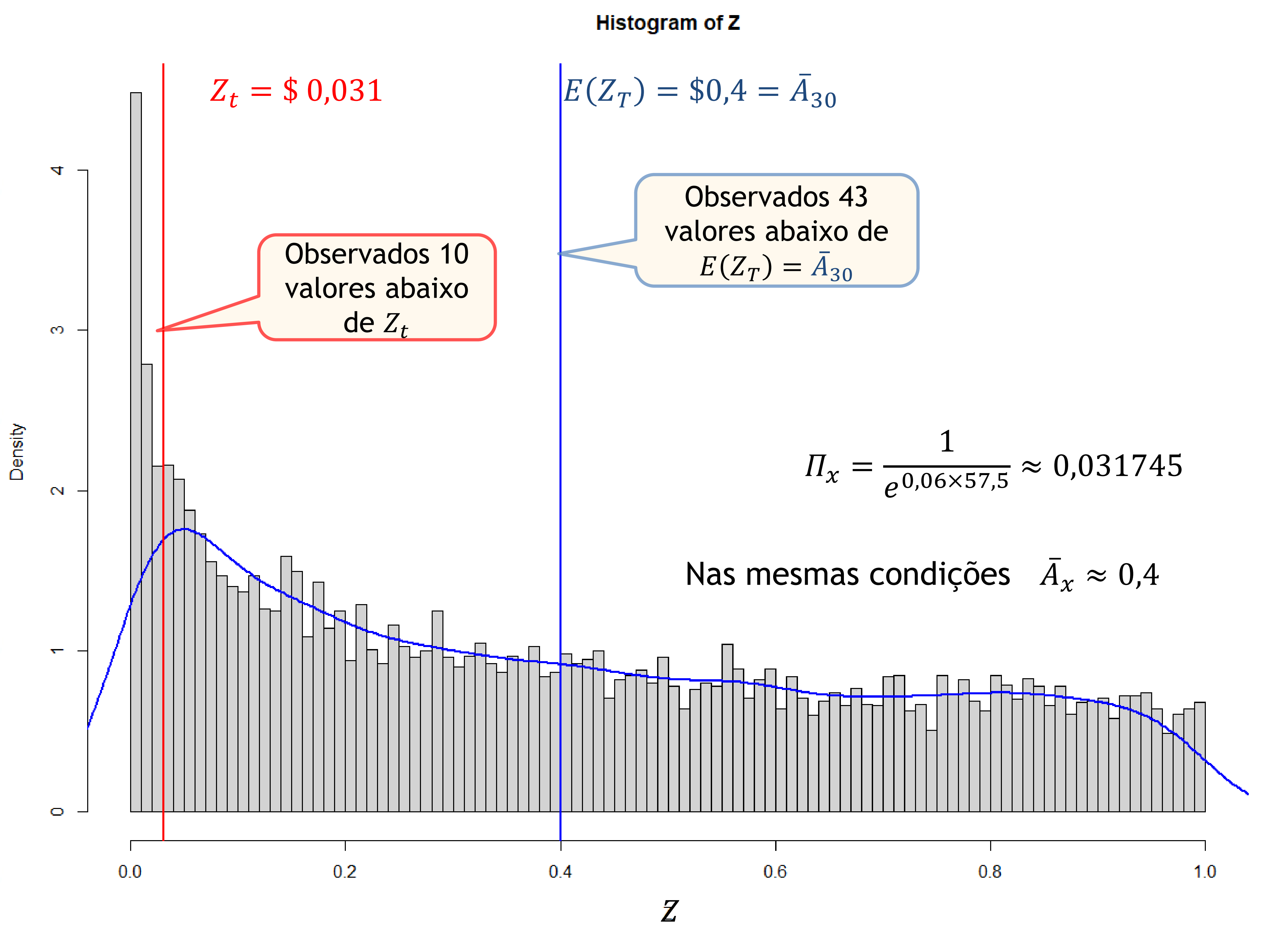
$$P(T_x > t_{10\%}) = 0{,}1$$

$$P(T_x > t_{10\%}) = \int_{t_{10\%}}^{\infty} 0{,}04e^{-0{,}04t} dt$$

$$P(T_x > t_{10\%}) = e^{-0{,}04t_{10\%}} = 0{,}1$$

$$t_{10\%} = 57{,}5 \; anos$$

Gráfico da simulação de 1000 apólices com as condições do exemplo 4.



Histogram of Z
$Z_t = \$\ 0{,}031$
$E(Z_T) = \$0{,}4 = \bar{A}_{30}$
Observados 43 valores abaixo de $E(Z_T) = \bar{A}_{30}$
Observados 10 valores abaixo de $Z_t$
$\Pi_x = \dfrac{1}{e^{0{,}06\times 57{,}5}} \approx 0{,}031745$
Nas mesmas condições $\bar{A}_x \approx 0{,}4$
Density
0
1
2
3
4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Z

# SEGURO DE VIDA INTEIRO

$$P\left(Z_{T_x} \leq z\right) = P\left(T_x \geq -\frac{ln\left(\frac{z}{b}\right)}{\delta}\right)$$

$$P\left(Z_{T_x} \leq z\right) = \frac{S_{T_0}\left(x + \left(-\frac{ln(z)}{\delta}\right)\right)}{S_{T_0}(x)}, \qquad e^{-\delta(\omega - x)} \leq z \leq 1$$

**EXEMPLO 5:** Considere a função de sobrevivência dada por:

$$S_{T_0}(\mathrm{t}) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - \mathrm{t})^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq \mathrm{t} \leq 115.$$

Dado $x = 40$ e $i = 4\%$ determine $P\left(Z_{T_x} \leq z\right)$.

# EXEMPLO 5:

$$P\left(Z_{T_x} \leq z\right) = \frac{S_{T_0}\left(40 - \dfrac{ln(z)}{0,04}\right)}{S_{T_0}(40)} = \frac{115^{-\frac{1}{3}}\left(115 - \left(40 - \dfrac{ln(z)}{0,04}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{115^{-\frac{1}{3}}(115-40)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P\left(Z_{T_x} \leq z\right) = \frac{\left(75 + \dfrac{ln(z)}{0,04}\right)^{\frac{1}{3}}}{(75)^{\frac{1}{3}}}$$

$$P\left(Z_{T_x} \leq z\right) = \left(\frac{3 + ln(z)}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad e^{-3} \leq z \leq 1$$

# Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Considere agora a variável aleatória $S$ associada a uma carteira de seguros composta por $k$ apólices (independentes e identicamente distribuídas), isso é

$$S = \sum_{i=1}^{k} Z_i$$

em que $Z_i$ corresponde a função valor presente da apólice $i$.

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}(Z_i) = kE(Z)$$

$$var(S) = var\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{k} var(Z_i) = k\, var(Z)$$

# Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Definição: Teorema central do limite.

Seja $S$ uma variável aleatória correspondente a uma soma de $k$variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada qual com esperança $\mu$ e variância $\sigma^2$. Então:

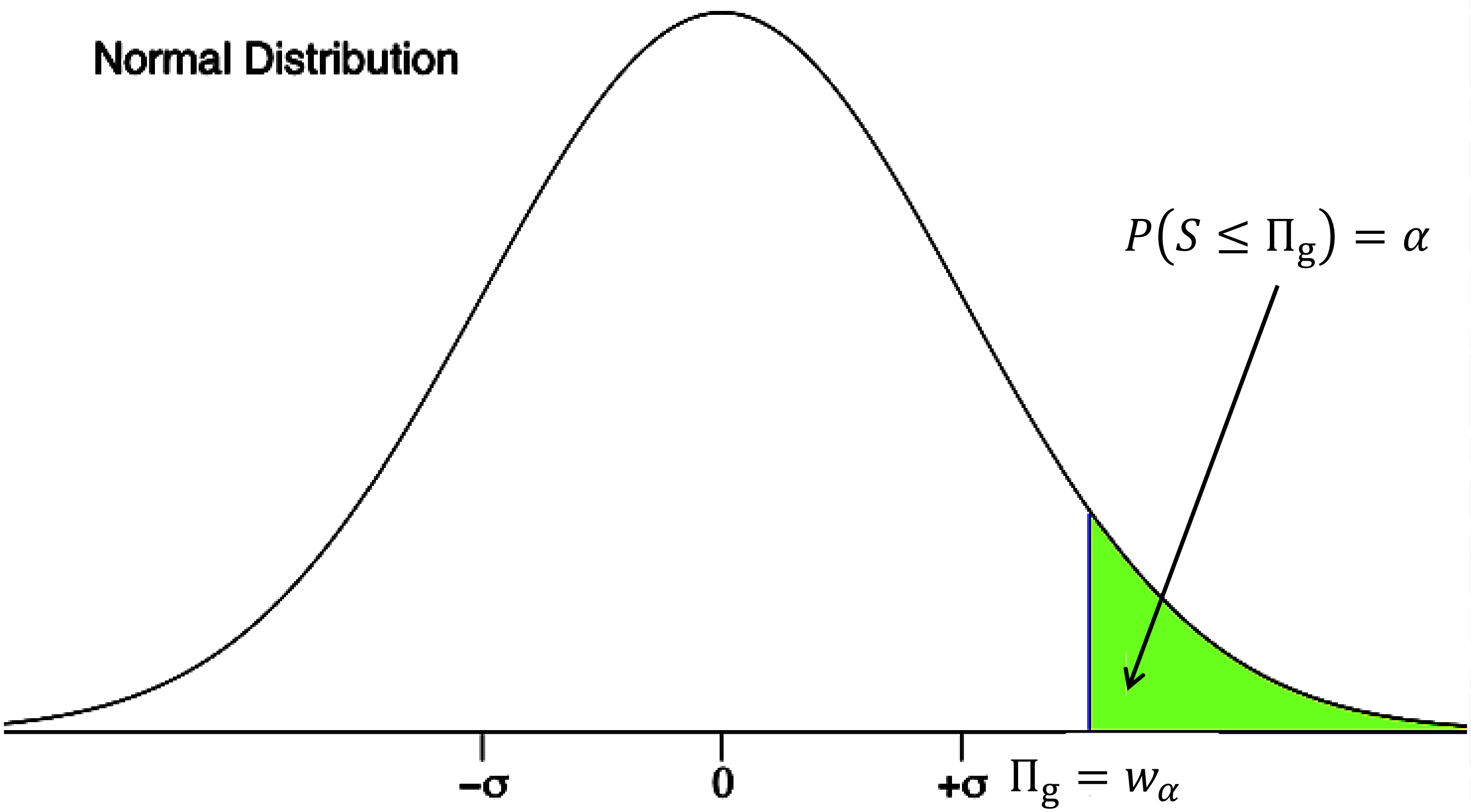
$$W = \frac{S - k\mu}{\sigma\sqrt{k}} \rightarrow W \sim N(0,1)$$

Logo

$$S \sim N(k\mu, k\sigma^2)$$

## Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

Chamando de $S$ a soma dos valores presentes necessários a cobrir os sinistros ocorridos, queremos encontrar o valor $\Pi_\alpha$ (prêmio global) tal que:



# Aproximação normal para uma carteira de seguros de vida

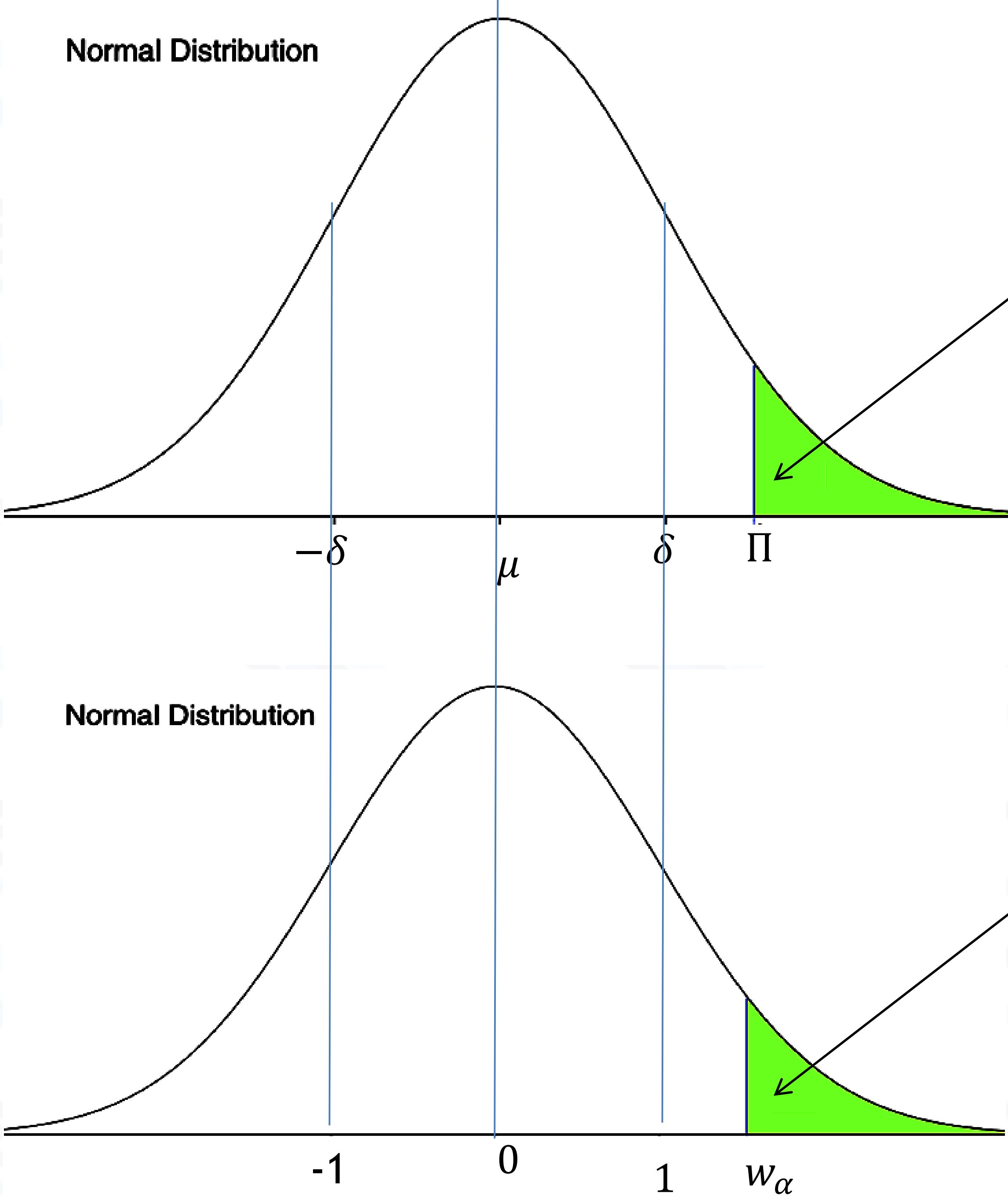


$$P\left(S \leq \Pi_{\mathrm{g}}\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{S - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}} \leq \frac{\Pi_{\mathrm{g}} - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$P\left(W \leq \frac{\Pi_{\mathrm{g}} - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$\frac{\Pi_{\mathrm{g}} - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}} = w_\alpha$$




$$P(S \leq \Pi_g) = \alpha$$

$$P(W \leq w_\alpha) = \alpha$$

$$\frac{\Pi_g - nE(Z)}{\sigma_Z\sqrt{n}} = w_\alpha$$

**EXEMPLO 6:** Seja uma carteira com 100 apólices de seguro de vida vitalício com benefício pago no momento da morte, em que todas as apólices são independentes e identicamente distribuídas. Assumindo que $x = 60$ , e que o valor médio de gasto com cada apólice seja de $0{,}4$ com variância de $0{,}09$, qual é o valor do prêmio $\Pi_{\mathrm{g}}$ (utilizando aproximação normal) cuja probabilidade de que o total de indenizações dessa carteira o supere seja de $5\%$, ou seja $P(S \leq \Pi) = 0{,}95$. Considere $b = 1$ e $\delta = 0{,}06$.

$$P(S \leq \Pi_{\mathrm{g}}) = 0{,}95.$$

## SOLUÇÃO

Se para cada apólice temos $E(Z) = 0{,}4\ \text{u.m.}$ e $var(Z_T) \approx 0{,}09$, então $E(S) = 40$ e $var(S) = 9$. Assim:

$$P(S \leq \Pi) = 0{,}95 \quad P\left(W \leq \frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}}\right) = 0{,}95$$

Como $W \sim N(0{,}1)$, então

$$\frac{\Pi - 40}{\sqrt{9}} = w_{0{,}95} = 1{,}645$$

$$\Pi = 44{,}93.$$

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial - Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.