# Matemática Atuarial II

## Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br
Leonardo Henrique Costa
leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

- São anuidades pagas enquanto um status sobrevive mas seu início ocorre apenas após a falha de outro status.
  - Pagamento de pensão após morte do participante

- Os produtos atuariais que são revertidos pra outras pessoas ( ou outros status) tem uma notação própria...

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

Considere um produto dotal puro com as seguintes características:

Será pago a $y$ um beneficio igual a 1, caso $x$ tenha morrido entre a data 0 e $n$. Como calcular esse produto?

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

Considere um produto dotal puro com as seguintes características:

Será pago a $y$ um beneficio igual a 1, caso $x$ tenha morrido entre a data 0 e $n$. Como calcular o valor presente atuarial desse produto?

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = {}_{n}p_{y}v^{n} \times {}_{n}q_{x}$$

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = {}_{n}p_{y}v^{n}(1 - {}_{n}p_{x})$$

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = {}_{n}p_{y}v^{n} - {}_{n}p_{y}\,{}_{n}p_{x}v^{n}$$

$$A_{x|y:\overline{n|}}{}^{1} = A_{y:\overline{n|}}{}^{1} - A_{x,y:\overline{n|}}{}^{1}$$

# Anuidades reversíveis

Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à $y$ enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando $x$ falecer

Se $\lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil$, então o pagamento a esse benefício será $0$

Se $\lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil$, então o pagamento ocorrerá até o falecimento de $y$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à $y$ enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando $x$ falecer

Se $\lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil$, então o pagamento a esse benefício será $0$

Se $\lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil$, então o pagamento ocorrerá até o falecimento de $y$

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ v^{\lceil T_x \rceil + 1} + v^{\lceil T_x \rceil + 2} + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

Unifal-MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ v^{\lceil T_x \rceil + 1} + v^{\lceil T_x \rceil + 2} + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

De outra forma:

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}\right) - \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_x \rceil}\right), & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_y \rceil}\right) - \left(1 + v + \cdots + v^{\lceil T_x \rceil}\right), & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 0, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_x \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

Logo

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1}|} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_x \rceil + 1}|}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

# Anuidades reversíveis

$$Z = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1|}} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1|}}, & \lceil T_y \rceil \leq \lceil T_x \rceil \\ \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1|}} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_x \rceil + 1|}}, & \lceil T_y \rceil > \lceil T_x \rceil \end{cases}$$

A variável aleatória  pode ser descrita como uma subtração entre uma série de pagamentos relacionados ao tempo de vida adicional de $(y)$ por outra série de pagamentos que estará relacionada ao menor tempo de vida adicional entre $(x)$ e $(y)$, assim:

$$Z = \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1|}} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_{y,x} \rceil + 1|}}$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

Do slide anterior é fácil notar também que

$$Z = \ddot{a}_{\overline{\lceil T_y \rceil + 1|}} - \ddot{a}_{\overline{\lceil T_{y,x} \rceil + 1|}}$$

Logo

$$E(Z) = \color{red}{\ddot{a}_{x|y}} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$

# Anuidades reversíveis

É fácil notar que

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y} = \ddot{a}_{\overline{x,y}} - \ddot{a}_x$$

A série de pagamentos relacionados a $y$ menos a série de pagamentos relacionado ao mínimo entre $x$ e $y$. Ou o a série de pagamentos do máximo entre $x$ e $y$ menos a série de $x$.

$$\ddot{a}_{x|y}$$

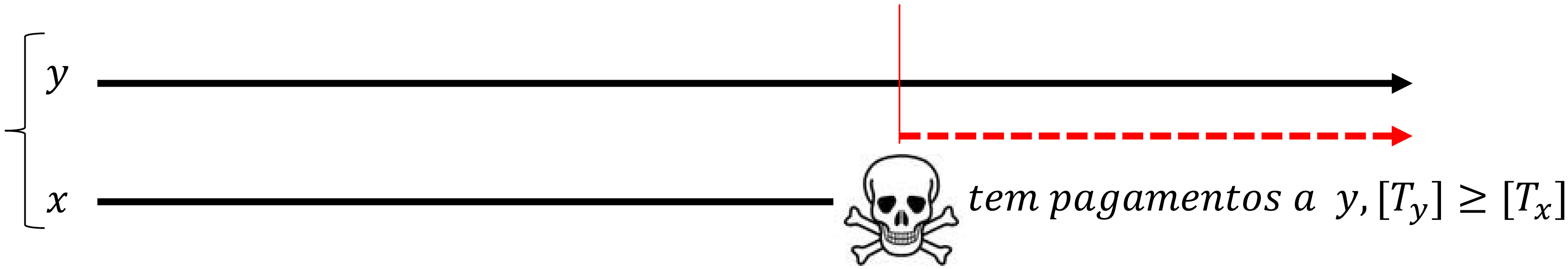
O PRIMEIRO TERMO INDICA A REGRA DE INÍCIO DA REVERSÃO (MORTE DE $x$ POR EXEMPLO)

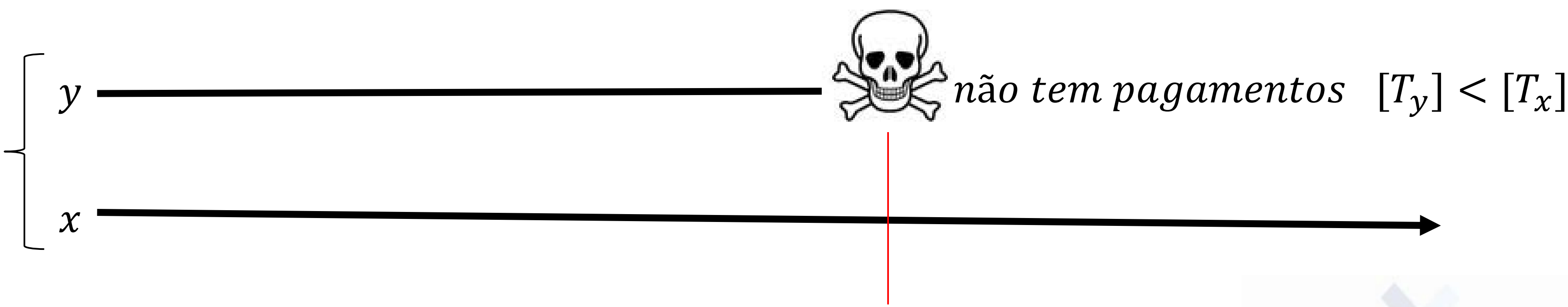
O SEGUDO TERMO INIDICA A REGRA DO FIM DA REVERSÃO, MORTE DE $y$ POR EXEMPLO.

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

$$\color{red}{\ddot{a}_{x|y}} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$




$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_{\overline{x,y}} - \ddot{a}_x$$

**Exemplo 1:** Considere dois indivíduos com vidas independentes, um individuo tem $x = 107$ anos e o outro tem $y = 105$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à $y$ enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando $x$ falecer, qual o valor do VPA para esse produto atuarial? Considere a tábua AT-49 e taxa de juros de 3 % ao ano.

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

**Exemplo 1:** Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 107$ anos e o outro tem $y = 105$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à $y$ enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando $x$ falecer, qual o valor do VPA para esse produto atuarial? Considere a tábua AT-49 e taxa de juros de 3 % ao ano.

$$\ddot{a}_{107|105}$$

O PRIMEIRO TERMO INDICA A REGRA DE INÍCIO DA REVERSÃO (MORTE DE $x$ POR EXEMPLO)

O SEGUNDO TERMO INIDICA A REGRA DO FIM DA REVERSÃO, MORTE DE $y$ POR EXEMPLO.

$$\ddot{a}_{107|105} = \ddot{a}_{105} - \ddot{a}_{105,107}$$

$$\ddot{a}_{107|105} = \left(\sum_{t=0}^{4} {}_{t}p_{105} v^{t}\right) - \left(\sum_{t=0}^{2} {}_{t}p_{105}\, {}_{t}p_{107} v^{t}\right) \approx 0{,}3903$$

# Anuidades reversíveis

Pensemos no caso em que a regra de início da reversão seja generalizada para $u$ ( não necessariamente a morte de $x$) e a regra do fim da reversão seja dado por $v$ ( não necessariamente a morte de $y$). assim

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_{v} - \ddot{a}_{u,v}$$

Por exemplo:

$u$ significa que o início da reversão se da com a morte de $x$ ou se passarem $n$ anos, o que ocorrer primeiro

$v$ significa que somente a morte do beneficiário y da fim a reversão...

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

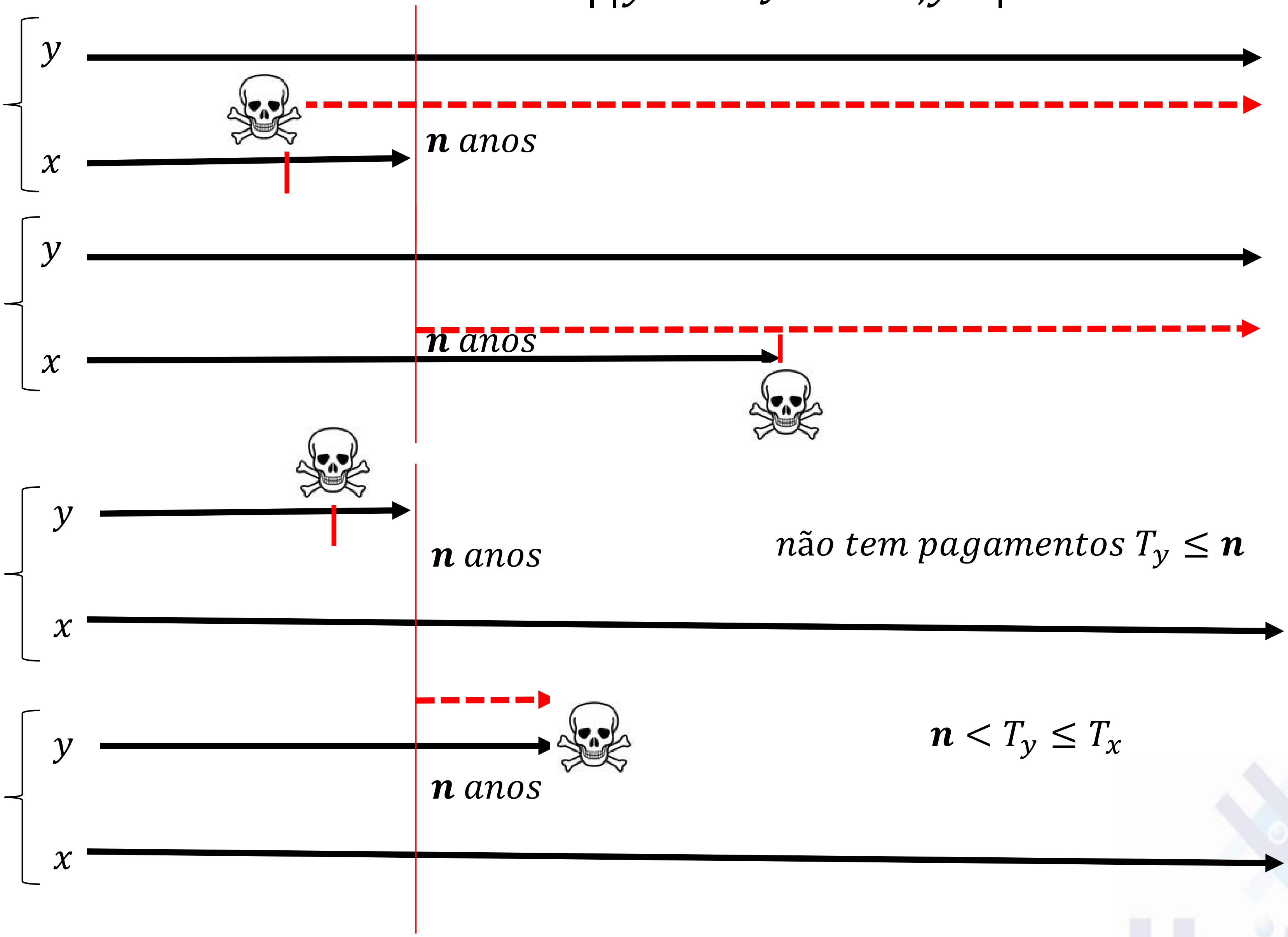
$u$ significa que o início da reversão se da com a morte de $x$ ou se passarem $n$ anos, o que ocorrer primeiro

$v$ significa que somente a morte do beneficiário y da fim a reversão, então:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}\,|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}\,|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$




Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

**Exemplo 2:** Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 65$ anos e o outro tem $y = 25$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à $y$ enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando $x$ falecer ou se passarem 30 anos. Qual o valor do prêmio puro único para esse produto atuarial?

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

**Exemplo 2:** Considere dois indivíduos com vidas independentes, um indivíduo tem $x = 65$ anos e o outro tem $y = 25$ anos. Pensemos no caso de uma anuidade que será paga à $y$ enquanto viver. No entanto, o início dos pagamentos só ocorrerá quando $x$ falecer ou se passarem 30 anos. Qual o valor do prêmio puro único para esse produto atuarial?

$$u = x{:}\overline{n}|$$
$$v = y$$

- $u$ significa que o início da reversão se da com a morte de $x$ ou se passarem $n$ anos, o que ocorrer primeiro
- $v$ significa que somente a morte do beneficiário $y$ da fim a reversão...

$$\ddot{a}_{65:\overline{30|}\,|25} = \ddot{a}_{25} - \ddot{a}_{65,25:\overline{30|}}$$

$$\ddot{a}_{65:\overline{30|}\,|25} = \left(\sum_{t=0}^{84} {}_tp_{25}v^t\right) - \left(\sum_{t=0}^{29} {}_tp_{65}\,{}_tp_{25}v^t\right)$$

**Exemplo 3:** Pensemos agora no caso em que $(y)$ receberá uma pensão temporária de $n$ anos mas essa anuidade será paga somente quando $(x)$ falecer. Quanto deve ser pago hoje como prêmio puro único?

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

**Exemplo 3:** Pensemos agora no caso em que $(y)$ receberá uma pensão temporária de $n$ anos mas essa anuidade será paga somente quando $(x)$ falecer. Quanto deve ser pago hoje como prêmio puro único?

$$u = x$$
$$v = y:\overline{n|}$$

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n|}} = \ddot{a}_{y:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

- $u$= significa que somente a morte de $x$ da início a reversão
- $v$ = significa que a reversão pode ser encerrada com o falecimento de $y$ ou decorridos $n$ anos

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_y v^t\right) - \left(\sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \, {}_tp_y v^t\right)$$

# Anuidades reversíveis

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

$u$ significa que o início da reversão

$v$ significa o fim a reversão

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}\,|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}_{x|y:\overline{n|}} = \ddot{a}_{y:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x,y:\overline{n|}}$$

$$a_{x|y} = a_y - a_{x,y}$$

$$a_{x:\overline{n|}\,|y} = a_y - a_{x,y:\overline{n|}}$$

$$a_{x|y:\overline{n|}} = a_{y:\overline{n|}} - a_{x,y:\overline{n|}}$$

$$\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{x,y}$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

Considere uma renda vitalícia paga a $y$ e $z$ a partir da morte de $x$ ( final do período), assim temos:

$u$: regra para iniciar a reversão ( morte de $x$) e condição de $y$ e $z$ estarem vivos

$v$: regra para finalizar a reversão ( primeira morte entre $y$ e $z$)

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_{v} - \ddot{a}_{u,v}$$

$$\dots$$

$$\boldsymbol{a_{x|y,z} = a_{y,z} - a_{x,y,z}}$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

# Anuidades reversíveis

Considere uma renda vitalícia paga a $y$ ou $z$ a partir da morte de $x$ ( final do período), assim temos:

$u$ : regra para iniciar a reversão ( morte de $x$ ) e condição de $y$ **ou** $z$ estarem vivos

$v$: regra para finalizar a reversão ( última morte entre $y$ e $z$)

$$\ddot{a}_{u|v} = \ddot{a}_v - \ddot{a}_{u,v}$$

...

$$\boldsymbol{a_{x|\overline{y,z}} = a_{\overline{y,z}} - a_{x,\overline{y,z}}}$$

Unifal MG
Universidade Federal de Alfenas

- **Portal Halley :** https://atuaria.github.io/portalhalley/

- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks.** Cambridge University Press, 2019.

- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos.** São Paulo: Atlas, 2009.

- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV,2022.